12 ஆம் வகுப்பு

கணிதம்

தமிழ் வழி

மேல்நிலை இரண்டாமாண்டு சிறப்புக் கையேடு
கணிதம்

கிருஷ்ணகிரி மாவட்டம் 2024-2025

தலைமை

திருமதி. **க.பெ. மகேஸ்வரி,**
முதன்மைக்கல்வி அலுவலர், கிருஷ்ணகிரி மாவட்டம்

ஒருங்கிணைப்பாளர்கள்:

திருமதி. **ப. சரவணன்** மாவட்டகல்வி அலுவலர் கிருஷ்ணகிரி மா.வ.

திரு.சி. **சிவராமன்** மாவட்டகல்வி அலுவலர் கிருஷ்ணகிரி மா.வ

முனைவர். **மு. வெங்கடேசன்,** சி.இ.ஓ, நேர்முக உதவியாளர் (மே.நி.க.) கிருஷ்ணகிரி மா.வ.

திரு.**எஸ்.வடிவேல்** உதவ திட்ட அலுவலர், சி.இ.ஓ.) கிருஷ்ணகிரி மா.

திரு. **ச. ஜான் பாக்கியம்,** உதவி தலைமையாசிரியர், ந. நி. பள்ளி, இராசு வீதி, கிருஷ்ணகிரி.

பாட ஒருங்கிணைப்பாளர்

முனைவர்.**பொ.ஜெ.முரளி,** தலைமை ஆசிரியர், அமேநி பள்ளி, பாரூர்.

பாட ஆசிரியர்கள் குழு

1. திரு. M. **செஞ்சி,** மு.க.ஆ (கணிதம்), அ.ஆ.மே.நி பள்ளி, சந்தூர்
2. திரு. K. **ரவிகண்ணன்,** மு.க.ஆ (கணிதம்) அ.பெ.மே.நி பள்ளி, கிருஷ்ணகிரி
3. திரு. S. **வெங்கடேசன்,** மு.க.ஆ (கணிதம்), பெரியார் ராமசாமி ஆ.மே.நி.பள்ளி, நாகரசம்பட்டி
4. திரு. N. **காளியப்பன்,** மு.க.ஆ (கணிதம்), அ.மே.நி பள்ளி மோரனஅள்ளி
5. திரு. M. **அருண்குமார்,** மு.க.ஆ (கணிதம்), அ.மே.நி. பள்ளி, உள்ளுகுறுக்கை
6. திரு. G. **சேகர்,** மு.க.ஆ (கணிதம்), அ.மே.நி பள்ளி, மத்திகிரி
7. திரு. S. **கதிரவன்,** மு.க.ஆ (கணிதம்), அ.மே.நி பள்ளி, ஐகுந்தம்
8. திரு. P. **இரமேஷ்,** மு.க.ஆ (கணிதம்), அ.மே.நி பள்ளி, அரசம்பட்டி
9. திரு. **செள. விஜயன்,** மு.க.ஆ (கணிதம்), அ.மே.நி பள்ளி, பாரூர்
10. திருமதி . **ப. சங்கீதா,** மு.க.ஆ (கணிதம்), அ.மே.நி பள்ளி, காவேரிப்பட்டிணம்

12 ஆம் வகுப்பு
ஒரு மதிப்பெண் வினாக்கள் கணிதம்

12-ம் வகுப்பு தமிழ் பாடப்புத்தகத்தில் உள்ள ஒரு மதிப்பெண் வினாக்கள், **GeoGebra** மென்பொருளின் உதவியோடு, ஒரு வினாவிற்கு சரியான விடையை தேர்வு செய்ய அதிகபட்சம் மூன்று வாய்ப்புகள் வழங்கி, மாணவர்களின் கற்றல், கற்பித்தல் திறன் அதிகரிக்கும் வகையில் வடிவமைக்கப்பட்டுள்ளது என்பதை தெரிவித்துக் கொள்கிறோம்.

குறிப்பு :-

Hi-Tech Lab- QR Code- ஐ செய்து அல்லது **Link- Click** செய்து மாணவர்கள் பயிற்சி செய்யும் விதமாக மென்பொருள் உருவாக்கப்பட்டுள்ளது.

தமிழ் வழி	ஆங்கில வழி
https://www.geogebra.org/m/svp4anun	***https://www.geogebra.org/m/zzajah2u***

உருவாக்கம் :

முனைவர்.பொ .ஜெ.முரளி
தலைமை ஆசிரியர்
அரசு மேல்நிலைப்பள்ளி, பாரூர்.

திரு. நா .காளியப்பன்
முதுகலை ஆசிரியர்
அரசு மே.நி.பள்ளி , மோரன அள்ளி.

வெக்டர் இயற்கணிதத்தின் பயன்பாடுகள்

முக்கிய குறிப்புகள்:

- ❖ $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$
- ❖ $\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$
- ❖ விசை செய்த வேலை $W = \vec{F}\cdot\vec{d}$
- ❖ திருப்புத்திறன் $\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F}$
- ❖ $\vec{a},\vec{b}$ செங்குத்து வெக்டர்கள் எனில் $\Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$
- ❖ $\vec{a},\vec{b}$ இணை வெக்டர்கள் எனில் $\Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$
- ❖ இணைகரத்தின்மத்தின் கனஅளவு $V = \left|[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\right|$
- ❖ $\vec{a} = a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath} + a_3\hat{k}$ **மற்றும்** $\overrightarrow{b} = b_1\hat{\imath} + b_2\hat{\jmath} + b_3\hat{k}$ **எனில்**

திசையிலி பெருக்கம் (அ) புள்ளி பெருக்கம்

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

வெக்டர் பெருக்கம் (அ) குறுக்கு பெருக்கம்

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

- ❖ $\vec{r} = \vec{a} + s\vec{b}$ மற்றும் $\vec{r} = \vec{c} + t\vec{d}$, என்ற கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட குறுங்கோணம் θ எனில்

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{|\vec{b}\cdot\vec{d}|}{|\vec{b}||\vec{d}|}\right)$$

- ❖ $\vec{r}\cdot\vec{n}_1 = p_1$ மற்றும் $\vec{r}\cdot\vec{n}_2 = p_2$ என்ற தளங்களுக்கு இடைப்பட்ட குறுங்கோணம் θ எனில்

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}\right)$$

- ❖ $\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}$ என்ற கோடு மற்றும் $\vec{r}\cdot\vec{n} = p$, என்ற தளத்திற்கு இடைப்பட்ட குறுங்கோணம் θ எனில்

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{|\vec{b}\cdot\vec{n}|}{|\vec{b}||\vec{n}|}\right)$$

- ❖ $\vec{a} = a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath} + a_3\hat{k}$, $\vec{b} = b_1\hat{\imath} + b_2\hat{\jmath} + b_3\hat{k}$, $\vec{c} = c_1\hat{\imath} + c_2\hat{\jmath} + c_3\hat{k}$. எனில்,

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ ஒரு தள வெக்டர்கள்

$$\Leftrightarrow [\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

❖ MODEL-I

❖ துணையலகு வெக்டர் சமன்பாடு

$$\vec{r} = \vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$$

துணையலகு வெக்டர் சமன்பாடு

$$(\vec{r}-\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = 0$$

கார்டீசியன் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

❖ MODEL-II

துணையலகு வெக்டர் சமன்பாடு

$$\vec{r} = (1-s)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$$

துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு

$$(\vec{r}-\vec{a})\cdot[(\vec{b}-\vec{a})\times\vec{c}] = 0$$

கார்டீசியன் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

❖ MODEL III

❖ துணையலகு வெக்டர் சமன்பாடு

$$\vec{r} = (1-s-t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$$

துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு

$$(\vec{r}-\vec{a})\cdot[(\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a})] = 0$$

கார்டீசியன் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

❖ $\frac{x-x_1}{b_1} = \frac{y-y_1}{b_2} = \frac{z-z_1}{b_3}$ மற்றும்

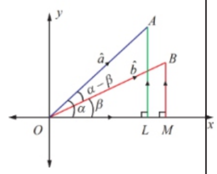
$\frac{x-x_2}{d_1} = \frac{y-y_2}{d_2} = \frac{z-z_2}{d_3}$ என்பன வெட்டிக்கொண்டால்

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = 0$$

5 MARKS

1. $\boldsymbol{cos(\alpha-\beta) = cos\alpha cos\beta + sin\alpha sin\beta}$ **என வெக்டர் முறையில் நிருபி.**

தீர்வு:



$\hat{a}$ மற்றும் $\hat{b}$ ஓரலகு வெக்டர்கள் என்க

$$\hat{a} = cos\alpha\hat{\imath} + sin\alpha\hat{\jmath}$$

$$\hat{b} = cos\beta\hat{\imath} + sin\beta\hat{\jmath}$$

$$\hat{b}\cdot\hat{a} = cos(\alpha-\beta) \;---\to (1)$$

$$\hat{b}\cdot\hat{a} = (cos\beta\hat{\imath} + sin\beta\hat{\jmath})\cdot(cos\alpha\hat{\imath} + sin\alpha\hat{\jmath})$$

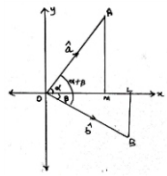
$$= cos\alpha cos\beta + sin\alpha sin\beta \;--\to (2)$$

(1)&(2) ல் இருந்து

$$cos(\alpha-\beta) = cos\alpha cos\beta + sin\alpha sin\beta$$

2. $\boldsymbol{cos(\alpha+\beta) = cos\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta}$ **என வெக்டர் முறையில் நிருபி.**

தீர்வு:



$\hat{a}$ மற்றும் $\hat{b}$ ஓரலகு வெக்டர்கள் என்க

$$\hat{a} = cos\alpha\hat{\imath} + sin\alpha\hat{\jmath}$$

$$\hat{b} = cos\beta\hat{\imath} - sin\beta\hat{\jmath}$$

$$\hat{b}\cdot\hat{a} = cos(\alpha+\beta) \;---\to (1)$$

$$\hat{b}\cdot\hat{a} = (cos\beta\hat{\imath} - sin\beta\hat{\jmath})\cdot(cos\alpha\hat{\imath} + sin\alpha\hat{\jmath})$$

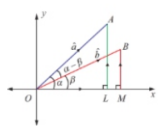
$$= cos\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta \;--\to (2)$$

(1)&(2) ல் இருந்து

$$cos(\alpha+\beta) = cos\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta$$

3. $\boldsymbol{sin(\alpha-\beta) = sin\alpha cos\beta - cos\alpha sin\beta}$ **என வெக்டர் முறையில் நிருபி.**

தீர்வு:



$\hat{a}$ மற்றும் $\hat{b}$ ஓரலகு வெக்டர்கள் என்க

$$\hat{a} = cos\alpha\hat{\imath} + sin\alpha\hat{\jmath}$$

$$\hat{b} = cos\beta\hat{\imath} + sin\beta\hat{\jmath}$$

$$\hat{b}\times\hat{a} = sin(\alpha-\beta)(\hat{k}) \;--\to (1)$$

$$\hat{b}\times\hat{a} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ cos\beta & sin\beta & 0 \\ cos\alpha & sin\alpha & 0 \end{vmatrix}$$

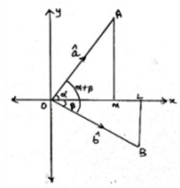
$$= (sin\alpha cos\beta - cos\alpha sin\beta)(\hat{k}) \;--\to (2)$$

(1) & (2) ல் இருந்து

$$sin(\alpha-\beta) = sin\alpha cos\beta - cos\alpha sin\beta$$

4. $\boldsymbol{sin(\alpha+\beta) = sin\alpha cos\beta + cos\alpha sin\beta}$ **என வெக்டர் முறையில் நிருபி.**

தீர்வு:



$\hat{a}$ மற்றும் $\hat{b}$ ஓரலகு வெக்டர்கள் என்க

$$\hat{a} = cos\alpha\hat{\imath} + sin\alpha\hat{\jmath}$$

$$\hat{b} = cos\beta\hat{\imath} - sin\beta\hat{\jmath}$$

$$\hat{b}\times\hat{a} = sin(\alpha+\beta)\hat{k} \;-----\to (1)$$

$$\hat{b}\times\hat{a} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ cos\beta & -sin\beta & 0 \\ cos\alpha & sin\alpha & 0 \end{vmatrix}$$

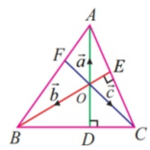
$$= (sin\alpha cos\beta + cos\alpha sin\beta)\hat{k} \;---\to (2)$$

(1)&(2) ல் இருந்து

$$sin(\alpha+\beta) = sin\alpha cos\beta + cos\alpha sin\beta$$

5. ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சிகளிலிருந்து அவற்றிற்கு எதிரேயுள்ள பக்கங்களுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடுகள்(குத்துக்கோடுகள்) ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் என நிறுவுக.

தீர்வு:



$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$

AD⊥BC ; BE ⊥CA

நிறுவ வேண்டியது CF⊥BA

நிலை:1 AD⊥BC

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$$

$$\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = 0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{c} - \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \longrightarrow (1)$$

நிலை:2 BE ⊥ CA

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA} = 0$$

$$\overrightarrow{OB}\cdot(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) = 0$$

$$\vec{b}\cdot\vec{a} - \vec{b}\cdot\vec{c} = 0 \longrightarrow (2)$$

சமன் (1) + (2)⟹ $\vec{a}\cdot\vec{c} - \vec{b}\cdot\vec{c} = 0$

$$(\vec{a} - \vec{b})\cdot\vec{c} = 0$$

$$(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OC} = 0$$

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{OC} = 0$$

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CF} = 0 \Longrightarrow \text{CF}\perp \text{BA}$$

எனவே, ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சிகளிலிருந்து அவற்றிற்கு எதிரேயுள்ள பக்கங்களுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடுகள்(குத்துக்கோடுகள்) ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும்.

6. $\boldsymbol{\vec{a} = \hat{\imath} - \hat{\jmath}, \vec{b} = \hat{\imath} - \hat{\jmath} - 4\hat{k}, \vec{c} = 3\hat{\jmath} - \hat{k}}$**,மற்றும்** $\boldsymbol{\vec{d} = 2\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} + \hat{k}}$ **எனில்** $\boldsymbol{(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = [\vec{a},\vec{b},\vec{d}]\vec{c} - [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{d}}$ **என நிருபி**

தீர்வு:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 4\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$$

$$\vec{c}\times\vec{d}=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ 0 & 3 & -1\\ 2 & 5 & 1\end{vmatrix}=8\hat{\imath}-2\hat{\jmath}-6\hat{k}$$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ 4 & 4 & 0\\ 8 & -2 & -6\end{vmatrix}$$

$$=-24\hat{\imath}+24\hat{\jmath}-40\hat{k}\,--------\rightarrow(1)$$

$$\left[\vec{a},\vec{b},\vec{d}\right]=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & -4\\ 2 & 5 & 1\end{vmatrix}=28,$$

$$\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & -4\\ 0 & 3 & -1\end{vmatrix}=12$$

$$[\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{d}}]\vec{\mathbf{c}}-[\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{c}}]\vec{\mathbf{d}}=\mathbf{28}(\mathbf{3\hat{j}}-\mathbf{\hat{k}})-\mathbf{12}(\mathbf{2\hat{\imath}}+\mathbf{5\hat{j}}+\mathbf{\hat{k}})$$

$$=-24\hat{\imath}+24\hat{\jmath}-40\hat{k}\,--\,------\rightarrow(2)$$

(1), (2) ல் இருந்து

$$\left(\vec{\boldsymbol{a}}\times\vec{\boldsymbol{b}}\right)\times\left(\vec{\boldsymbol{c}}\times\vec{\boldsymbol{d}}\right)=\left[\vec{\boldsymbol{a}},\vec{\boldsymbol{b}},\vec{\boldsymbol{d}}\right]\vec{\boldsymbol{c}}-\left[\vec{\boldsymbol{a}},\vec{\boldsymbol{b}},\vec{\boldsymbol{c}}\right]\vec{\boldsymbol{d}}$$

செய்து பார்க்க:

$$\left(\vec{\boldsymbol{a}}\times\vec{\boldsymbol{b}}\right)\times\left(\vec{\boldsymbol{c}}\times\vec{\boldsymbol{d}}\right)=\left[\vec{\boldsymbol{a}},\vec{\boldsymbol{c}},\vec{\boldsymbol{d}}\right]\vec{\boldsymbol{b}}-\left[\vec{\boldsymbol{b}},\vec{\boldsymbol{c}},\vec{\boldsymbol{d}}\right]\vec{\boldsymbol{a}}$$

7. $\vec{\boldsymbol{a}}=\mathbf{2}\hat{\boldsymbol{\imath}}+\mathbf{3}\hat{\boldsymbol{\jmath}}-\hat{\boldsymbol{k}},\vec{\boldsymbol{b}}=\mathbf{3}\hat{\boldsymbol{\imath}}+\mathbf{5}\hat{\boldsymbol{\jmath}}+\mathbf{2}\hat{\boldsymbol{k}}$,**மற்றும்** $\vec{\boldsymbol{c}}=-\hat{\boldsymbol{\imath}}-\mathbf{2}\hat{\boldsymbol{\jmath}}+\mathbf{3}\hat{\boldsymbol{k}}$ **எனில்** $\vec{\boldsymbol{a}}\times\left(\vec{\boldsymbol{b}}\times\vec{\boldsymbol{c}}\right)=(\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{c}})\vec{\boldsymbol{b}}-\left(\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}}\right)\vec{\boldsymbol{c}}$ **என்பதை சரிபார்.**

தீர்வு: $\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ 3 & 5 & 2\\ -1 & -2 & 3\end{vmatrix}=19\hat{\imath}-11\hat{\jmath}-\hat{k}$

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ 2 & 3 & -1\\ 19 & -11 & -1\end{vmatrix}$$

$$=-14\hat{\imath}-17\hat{\jmath}-79---\!>(1)$$

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=\left(2\hat{\imath}+3\hat{\jmath}-\hat{k}\right)\cdot\left(-\hat{\imath}-2\hat{\jmath}+3\hat{k}\right)=-11$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(2\hat{\imath}+3\hat{\jmath}-\hat{k}\right)\cdot\left(3\hat{\imath}+5\hat{\jmath}+2\hat{k}\right)=19$$

$$(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{c}})\vec{\mathbf{b}}-(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}})\vec{\mathbf{c}}=-\mathbf{11}(\mathbf{3\hat{\imath}}+\mathbf{5\hat{j}}+\mathbf{2\hat{k}})-\mathbf{19}(-\mathbf{\hat{\imath}}-\mathbf{2\hat{j}}+\mathbf{3\hat{k}})$$

$$(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}=-14\hat{\imath}-17\hat{\jmath}-79\hat{k}\ \ ---\!>(2)$$

(1),(2) ல் இருந்து

$$\vec{\boldsymbol{a}}\times\left(\vec{\boldsymbol{b}}\times\vec{\boldsymbol{c}}\right)=(\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{c}})\vec{\boldsymbol{b}}-\left(\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}}\right)\vec{\boldsymbol{c}}$$

செய்து பார்க்க :

$$\left(\vec{\boldsymbol{a}}\times\vec{\boldsymbol{b}}\right)\times\vec{\boldsymbol{c}}=(\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{c}})\vec{\boldsymbol{b}}-\left(\vec{\boldsymbol{b}}\cdot\vec{\boldsymbol{c}}\right)\vec{\boldsymbol{a}}$$

MODEL- I

8. (0,1,-5) என்ற புள்ளி வழி செல்வதும் $\vec{\boldsymbol{r}}=\left(\hat{\boldsymbol{\imath}}+\mathbf{2}\hat{\boldsymbol{\jmath}}-\mathbf{4}\hat{\boldsymbol{k}}\right)+\boldsymbol{s}(\mathbf{2}\hat{\boldsymbol{\imath}}+\mathbf{3}\hat{\boldsymbol{\jmath}}+\mathbf{6}\hat{\boldsymbol{k}})$ **மற்றும்** $\vec{\boldsymbol{r}}=\left(\hat{\boldsymbol{\imath}}-\mathbf{3}\hat{\boldsymbol{\jmath}}+\mathbf{5}\hat{\boldsymbol{k}}\right)+\boldsymbol{t}\left(\hat{\boldsymbol{\imath}}+\hat{\boldsymbol{\jmath}}-\hat{\boldsymbol{k}}\right)$ **என்ற கோடுகளுக்கு இணையாக உள்ளதுமான தளத்தின் துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளை காண்க.**

தீர்வு:

$$\vec{a}=0\hat{\imath}+\hat{\jmath}-5\hat{k}\quad \vec{b}=2\hat{\imath}+3\hat{\jmath}+6\hat{k}\quad \vec{c}=\hat{\imath}+\hat{\jmath}-\hat{k}$$

வெக்டர் சமன்பாடு: $\vec{r}=\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$

$$\vec{r}=\left(0\hat{\imath}+\hat{\jmath}-5\hat{k}\right)+s\left(2\hat{\imath}+3\hat{\jmath}+6\hat{k}\ \right)+t\left(\hat{\imath}+\hat{\jmath}-\hat{k}\right)$$

கார்டீசியன் சமன்பாடு: $\begin{vmatrix}\boldsymbol{x-x_1} & \boldsymbol{y-y_1} & \boldsymbol{z-z_1}\\ \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{b_3}\\ \boldsymbol{c_1} & \boldsymbol{c_2} & \boldsymbol{c_3}\end{vmatrix}=\mathbf{0}$

$$\begin{vmatrix}x-0 & y-1 & z+5\\ 2 & 3 & 6\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=0$$

$$(x-0)(-3-6)-(y-1)(-2-6)+(z+5)(2-3)=0$$

$$-9x+8y-z-13=0$$

or $\qquad 9x-8y+z+13=0$

துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு:

$$(\vec{r}-\vec{a})\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=0$$

$$\vec{\boldsymbol{r}}\cdot(\ \mathbf{9}\hat{\boldsymbol{\imath}}-\mathbf{8}\hat{\boldsymbol{\jmath}}+\hat{\boldsymbol{k}})+\mathbf{13}=\mathbf{0}$$

9. (2,3,6) என்ற புள்ளி வழிசெல்வதும் $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{1}$ **மற்றும்** $\frac{x+3}{2}=\frac{y-3}{-5}=\frac{z+1}{-3}$ **என்ற கோடுகளுக்கு இணையாக உள்ளதுமான தளத்தின் துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளை காண்க.**

தீர்வு: $\vec{a}=\ 2\hat{\imath}+3\hat{\jmath}+6\hat{k}\quad \vec{b}=2\hat{\imath}+3\hat{\jmath}+\hat{k}\quad \vec{c}=2\hat{\imath}-5\hat{\jmath}-3\hat{k}$

வெக்டர் சமன்பாடு: $\vec{\boldsymbol{r}}=\vec{\boldsymbol{a}}+\boldsymbol{s}\vec{\boldsymbol{b}}+\boldsymbol{t}\vec{\boldsymbol{c}}$

$$\vec{r}=\left(\ 2\hat{\imath}+3\hat{\jmath}+6\hat{k}\right)+s\left(2\hat{\imath}+3\hat{\jmath}+\hat{k}\ \right)+t\left(2\hat{\imath}-5\hat{\jmath}-3\hat{k}\right)$$

கார்டீசியன் சமன்பாடு: $\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=0$

$$\begin{vmatrix}x-2 & y-3 & z-6\\ 2 & 3 & 1\\ 2 & -5 & -3\end{vmatrix}=0$$

$$(x-2)(-9+5)-(y-3)(-6-2)+(z-6)(-10-6)=0$$

$$-4x+8y-16z+80=0$$

(or) $\qquad x-2y+4z-20=0$

துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு:

$$(\vec{r}-\vec{a})\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=0$$

$$\Rightarrow\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\left(\hat{\boldsymbol{\imath}}-\mathbf{2}\hat{\boldsymbol{\jmath}}+\mathbf{4}\hat{\boldsymbol{k}}\right)-\mathbf{20}=\mathbf{0}$$

10. (1,-2,4) என்ற புள்ளி வழி செல்வதும் $\boldsymbol{x}+\mathbf{2}\boldsymbol{y}-\mathbf{3}\boldsymbol{z}=\mathbf{11}$

கணிதம்

என்ற தளத்திற்குச் செங்குத்தாகவும் $\frac{x+7}{3}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z}{1}$ என்ற கோட்டிற்கு இணையாகவும் அமையும் தளத்தின்துணையலகு அல்லாத வெக்டர் & கார்டீசியன் சமன்பாடுகளை காண்க.

தீர்வு: $\vec{a}=\hat{\imath}-2\hat{\jmath}+4\hat{k}$ $\vec{b}=\hat{\imath}+2\hat{\jmath}-3\hat{k}$ $\vec{c}=3\hat{\imath}-\hat{\jmath}+\hat{k}$

வெக்டர் சமன்பாடு: $\vec{r}=\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$

$$\vec{r}=(\hat{\imath}-2\hat{\jmath}+4\hat{k})+s(\hat{\imath}+2\hat{\jmath}-3\hat{k})+t(3\hat{\imath}-\hat{\jmath}+\hat{k})$$

கார்டீசியன் சமன்பாடு: $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$(x-1)(2-3)-(y+2)(1+9)+(z-4)(-1-6)=0$$

$$-x-10y-7z+9=0 \quad (or)$$

$$x+10y+7z-9=0$$

துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு:

$$(\vec{r}-\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0$$

$$\vec{r}\cdot(\hat{\imath}+10\hat{\jmath}+7\hat{k})-9=0$$

11. $\vec{r}=(\hat{\imath}-\hat{\jmath}+3\hat{k})+t(2\hat{\imath}-\hat{\jmath}+4\hat{k})$ என்ற கோட்டை உள்ளடக்கியதும் $\vec{r}.(\hat{\imath}+2\hat{\jmath}+\hat{k})=8$ என்ற தளத்திற்குச் செங்குத்தானதுமான தளத்தின் துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளை காண்க.

தீர்வு: $\vec{a}=\hat{\imath}-\hat{\jmath}+3\hat{k}$ $\vec{b}=2\hat{\imath}-\hat{\jmath}+4\hat{k}$ $\vec{c}=\hat{\imath}+2\hat{\jmath}+\hat{k}$

வெக்டர் சமன்பாடு: $\vec{r}=\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$

$$\vec{r}=(\hat{\imath}-\hat{\jmath}+3\hat{k})+s(2\hat{\imath}-\hat{\jmath}+3\hat{k})+t(\hat{\imath}+2\hat{\jmath}+\hat{k})$$

கார்டீசியன் சமன்பாடு: $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$(x-1)(-1-8)-(y+1)(2-4)+(z-3)(4+1)=0$$

$$-9x+2y+5z-4=0$$

$$(or)\ \ 9x-2y-5z+4=0$$

துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு:

$$(\vec{r}-\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0$$

$$\Rightarrow \vec{r}\cdot(9\hat{\imath}-2\hat{\jmath}-5\hat{k})+4=0$$

12. $\vec{r}=(6\hat{\imath}-\hat{\jmath}+\hat{k})+s(-\hat{\imath}+2\hat{\jmath}+\hat{k})+t(-5\hat{\imath}-4\hat{\jmath}-5\hat{k})$ என்ற தளத்தின் துணையலகு அல்லாத வெக்டர் மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளை காண்க.

தீர்வு:

$\vec{a}=6\hat{\imath}-\hat{\jmath}+\hat{k}$ $\vec{b}=-\hat{\imath}+2\hat{\jmath}+\hat{k}$ $\vec{c}=-5\hat{\imath}-4\hat{\jmath}-5\hat{k}$

வெக்டர் சமன்பாடு: $\vec{r}=\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$

$$\vec{r}=(6\hat{\imath}-\hat{\jmath}+\hat{k})+s(-\hat{\imath}+2\hat{\jmath}+\hat{k})+t(-5\hat{\imath}-4\hat{\jmath}-5\hat{k})$$

கார்டீசியன் சமன்பாடு: $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0$

$$\begin{vmatrix} x-6 & y+1 & z-1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -5 & -4 & -5 \end{vmatrix}=0$$

$$(x-6)(-10+4)-(y+1)(5+5)+(z-1)(4+10)=0$$

$$-6x-10y+14z+12=0 \quad (or)$$

$$3x+5y-7z-6=0$$

துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு:

$$(\vec{r}-\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0$$

$$\Rightarrow \vec{r}\cdot(3\hat{\imath}+5\hat{\jmath}-7\hat{k})-6=0$$

MODEL-II

13. (-1,2,0), (2,2,-1) என்ற புள்ளிகள் வழியாகச் செல்வதும் $\frac{x-1}{1}=\frac{2y+1}{2}=\frac{z+1}{-1}$ என்ற கோட்டிற்கு இணையாக உள்ளதுமான தளத்தின் துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளை காண்க.

தீர்வு:

$\vec{a}=-\hat{\imath}+2\hat{\jmath}+0\hat{k}$ $\vec{b}=2\hat{\imath}+2\hat{\jmath}-\hat{k}$ $\vec{c}=\hat{\imath}+\hat{\jmath}-\hat{k}$

வெக்டர் சமன்பாடு: $\vec{r}=(1-s)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$

$$\vec{r}=(1-s)(-\hat{\imath}+2\hat{\jmath})+s(2\hat{\imath}+2\hat{\jmath}-\hat{k})+t(\hat{\imath}+\hat{\jmath}-\hat{k})$$

கார்டீசியன் சமன்பாடு: $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0$$

$$(x+1)(0+1)-(y-2)(-3+1)+(z-0)(3-0)=0$$

$$x+2y+3z-3=0$$

துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு:

$$(\vec{r}-\vec{a})\cdot[(\vec{b}-\vec{a})\times\vec{c}]=0$$

$$\vec{r}\cdot(\hat{\imath}+2\hat{\jmath}+3\hat{k})=3$$

14. (2,2,1), (9,3,6) என்ற புள்ளிகள் வழி செல்வதும் $2x+6y+6z=9$ என்ற தளத்திற்குச் செங்குத்தாக அமைவதுமான தளத்தின் துணையலகு வெக்டர் சமன்பாடு மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளை காண்க.

தீர்வு:

$\vec{a} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k}$ $\quad \vec{b} = 9\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 6\hat{k}$ $\quad \vec{c} = 2\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} + 6\hat{k}$ வெக்டர் சமன்பாடு: $\vec{r} = (1 - s)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$

$\vec{r} = (1 - s)(2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k}) + s(9\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 6\hat{k}) + t(2\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} + 6\hat{k})$

கார்டீசியன் சமன்பாடு: $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} x - 2 & y - 2 & z - 1 \\ 7 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x - 2)(6 - 30) - (y - 2)(42 - 10) + (z - 1)(42 - 2) = 0$$

$$-24x - 32y + 40z + 72 = 0$$

$$\text{(or)} \quad 3x + 4y - 5z - 9 = 0$$

துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு:

$$(\vec{r} - \vec{a}) \cdot [(\vec{b} - \vec{a}) \times \vec{c}] = \mathbf{0}$$

$$\vec{r} \cdot (3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 5\hat{k}) - 9 = 0$$

15. (2, 2,1), (1,-2,3) என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்வதும் (2, 1, −3) மற்றும் (−1,5, −8) என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேர்கோட்டிற்கு இணையாகவும் அமையும் தளத்தின் துணையலகு வெக்டர் சமன்பாடு மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளை காண்க.

தீர்வு:

$\vec{a} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k}$ $\quad \vec{b} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ $\quad \vec{c} = -3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 5\hat{k}$

வெக்டர் சமன்பாடு: $\vec{r} = (1 - s)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$

$\vec{r} = (1 - s)(2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k}) + s(\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}) + t(-3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 5\hat{k})$

கார்டீசியன் சமன்பாடு: $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} x - 2 & y - 2 & z - 1 \\ -1 & -4 & 2 \\ -3 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x - 2)(20 - 8) - (y - 2)(5 + 6) + (z - 1)(-4 - 12) = 0$$

$$12x - 11y - 16z + 14 = 0$$

துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு:

$$(\vec{r} - \vec{a}) \cdot [(\vec{b} - \vec{a}) \times \vec{c}] = \mathbf{0}$$

$$\vec{r} \cdot (12\hat{\imath} - 11\hat{\jmath} - 16\hat{k}) + 14 = 0$$

MODEL-III

16. (3,6, −2), (−1, −2,6) , மற்றும் (6, 4, −2) ஆகிய ஒரே நேர்கோட்டில் அமையாத மூன்று புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் தளத்தின் துணையலகு, துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளை காண்க.

தீர்வு:

$\vec{a} = 3\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} - 2\hat{k}$ $\quad \vec{b} = -\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 6\hat{k}$ $\quad \vec{c} = 6\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 2\hat{k}$

வெக்டர் சமன்பாடு: $\vec{r} = (1 - s - t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$

$\vec{r} = (1 - s - t)(3\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} - 2\hat{k}) + s(-\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 6\hat{k}) + t(6\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} - 2\hat{k})$

கார்டீசியன் சமன்பாடு: $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} x - 3 & y - 6 & z + 2 \\ -4 & -8 & 8 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x - 3)(0 + 16) - (y - 6)(0 - 24) + (z + 2)(8 + 24) = 0$$

$$16x - 48 + 24y - 144 + 32z + 64 = 0$$

$$(or) \quad 16x + 24y + 32z - 128 = 0$$

$$2x + 3y + 4z - 16 = 0$$

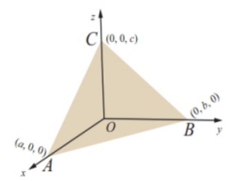
துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு:

$$(\vec{r} - \vec{a}) \cdot [(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})] = \mathbf{0}$$

$$\vec{r} \cdot (2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 8\hat{k}) - 16 = 0$$

17. வெட்டுத்துண்டு வடிவில் தளத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு:



$A(a,0,0), B(0,b,0), C(0,0,c)$

$\vec{a} = a\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 0\hat{k}$,

$\vec{b} = 0\hat{\imath} + b\hat{\jmath} + 0\hat{k}$ and

$\vec{c} = 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + c\hat{k}$,

வெக்டர் சமன்பாடு: $\vec{r} = (1 - s - t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$

$$\vec{r} = (1 - s - t)a\hat{\imath} + sb\hat{\jmath} + tc\hat{k}$$

கார்டீசியன் சமன்பாடு: $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} x - a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

18. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ மற்றும் $\frac{x-4}{5} = \frac{y-1}{2} = z$ என்ற கோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும் எனில் வெட்டும்புள்ளியை காண்க.

தீர்வு: வெட்டிக்கொள்ள நிபந்தனை

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} = s$ என்க

$\Rightarrow \quad (x, y, z) = (2s + 1, 3s + 2, 4s + 3)$

$\frac{x-4}{5} = \frac{y-1}{2} = z = t$ என்க

$\Rightarrow \quad (x, y, z) = (5t + 4, 2t + 1, t)$

வெட்டும் புள்ளியில்

$$(2s + 1, 3s + 2, 4s + 3) = (5t + 4, 2t + 1, t)$$

$\therefore$ நாம் பெறுவது $s = -1, \; t = -1$

வெட்டும் புள்ளி $(x, y, z) = (-1, -1, -1)$

செய்து பார்க்க.

$\frac{x-3}{3} = \frac{y-3}{-1}, z - 1 = 0$ மற்றும் $\frac{x-6}{2} = \frac{z-1}{3}, y - 2 = 0$ என்ற கோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும் எனில் வெட்டும்புள்ளியை காண்க..

குறிப்பு: $\frac{x-3}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{0}$ & $\frac{x-6}{2} = \frac{z-1}{3} = \frac{y-2}{0}$

$\vec{r} = \hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k} + t(2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 2\hat{k})$ மற்றும் $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+3}{4}$, என்ற கோட்கள் வெட்டும் புள்ளி வழியாகச் செல்வதும் மற்றும் இவ்விரு கோடுகளுக்கும் செங்குத்தானதுமான நேர்கோட்டின் துணையலகு வெக்டர் சமன்பாட்டைக் காண்க..

குறிப்பு: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+1}{2}$ & $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+3}{4}$

$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{4}$ மற்றும் $\frac{x-3}{1} = \frac{y-m}{2} = z$ என்ற கோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும் எனில் m ன் மதிப்பு காண்க.

இருபரிமாண பகுமுறைவடிவியல்

5 Marks

குறிப்புகள்:

மையம்$(0,0)$ மற்றும் ஆரம் r உடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 = r^2$$

(x_1, y_1) மற்றும் (x_2, y_2) ஐ விட்டத்தின் முனைப்புள்ளிகளாக கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$$

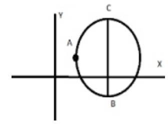
நேர்கோடு நீள்வட்டத்தை தொட நிபந்தனை $c^2 = a^2m^2 + b^2$,

தொடு புள்ளி $\left(-\frac{a^2m}{c}, \frac{b^2}{c}\right)$

நேர்கோடு நீள்வட்டத்தை தொட நிபந்தனை $c^2 = a^2m^2 - b^2$,

தொடு புள்ளி $\left(-\frac{a^2m}{c}, -\frac{b^2}{c}\right)$

1. $(1, 1), (2, -1)$, மற்றும் $(3, 2)$ என்ற புள்ளிகள் வழி செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.



தீர்வு: $A(1,1), B(2,-1), C(3,2)$

$M_1 = AB$ன் சாய்வு $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-1}{2-1} = -2$

$M_2 = AC$ன் சாய்வு $= \frac{2-1}{3-1} = \frac{1}{2}$

$m_1 \times m_2 = -1 \; \therefore \angle A = 90°$

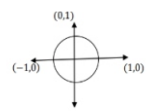
B, C,என்பன விட்டத்தின் முனைப்புள்ளிகள், எனவே வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$$

$$(x - 2)(x - 3) + (y + 1)(y - 2) = 0$$

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 - 5x - y + 4 = 0}$$

2. (1,0),(-1,0), மற்றும் (0,1) என்ற புள்ளிகள் வழி செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க..



தீர்வு:

விட்டத்தின் முனைப்புள்ளிகள் $(1,0), (-1,0)$

மையம்$(0,0)$, ஆரம்=1

வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 = 1$

3. $x - y + 4 = 0$ என்ற நேர்கோடு $x^2 + 3y^2 = 12$ என்ற நீள்வட்டத்திற்கு தொடுகோடு என நிறுவுக. மேலும் தொடும் புள்ளியைக்காண்க..

தீர்வு:

$x - y + 4 = 0 \qquad x^2 + 3y^2 = 12$

$y = x + 4 \qquad \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$

$\boldsymbol{m = 1, c = 4} \qquad \boldsymbol{a^2 = 12, b^2 = 4}$

நிபந்தனை: $\boldsymbol{c^2 = a^2m^2 + b^2}$

$c^2 = 16 = a^2m^2 + b^2$

$x - y + 4 = 0$ ஆனது $x^2 + 3y^2 = 12$ன் தொடுகோடாகும்

தொடு புள்ளி: $\left(-\frac{a^2m}{c}, \frac{b^2}{c}\right) = (-3, 1)$

4. $5x+12y=9$ **என்ற நேர்கோடு** $x^2-9y^2=9$, **என்ற அதிபரவளையத்தின் தொடுகோடு என நிறுவுக. மேலும் தொடும் புள்ளியைக்காண்க.**

தீர்வு:

$5x+12y=9$ $\qquad$ $x^2-9y^2=9$

$\Rightarrow y=-\frac{5}{12}x+\frac{3}{4}$, $\qquad$ $\Rightarrow \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{1}=9$

$m=-\frac{5}{12}, c=\frac{3}{4}$ $\qquad$ $a^2=9, b^2=1$

நிபந்தனை $c^2=a^2m^2-b^2$,

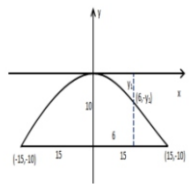
$\Rightarrow$ $c^2=\frac{9}{16}=a^2m^2-b^2$

$5x+12y=9$ஆனது $x^2-9y^2=9$ ன் தொடுகோடாகும்

தொடு புள்ளி $\left(-\frac{a^2m}{c},-\frac{b^2}{c}\right)=(5,-\frac{4}{3})$

5. **ஒரு பாலம் பரவளைய வடிவில் உள்ளது. மையத்தில் 10மீ உயரமும், அடிப்பகுதியில் 30மீ அகலமும் உள்ளது. மையத்திலிருந்து இருபுறமும் 6 மீ தூரத்தில் பாலத்தின் உயரத்தை காண்க.**

தீர்வு: $x^2=-4ay----\rightarrow(1)$



$(15,-10)$ல்

$(1)\Rightarrow(15)^2=-4a(-10)$

$\Rightarrow a=\frac{225}{40}$

$(1)\Rightarrow x^2=-4\left(\frac{225}{40}\right)y----\rightarrow(2)$

$(6,-y_1)$ல்

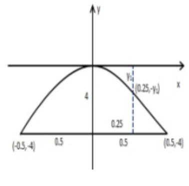
$$(1)\Rightarrow(6)^2=-4\times\frac{225}{40}(-y_1)$$

$$\frac{36\times40}{4\times225}=y_1\Rightarrow y_1=1.6$$

பாலத்தின் உயரம் $10-y_1=10-1.6=8.4\ \mathrm{m}$

6. **ஒரு நீரூற்றில், ஆதியிலிருந்து 0.5மீ கிடைமட்டத் தூரத்தில் நீரின் அதிகபட்ச உயரம் 4மீ, நீரின்பாதைஒரு பரவளையம் எனில் ஆதியிலிருந்து 0.75மீ கிடைமட்டத் தூரத்தில் நீரின் உயரத்தை காண்க.**

தீர்வு: $x^2=-4ay----\rightarrow(1)$



$(-0.5,-4)$ ல்

$(1)\Rightarrow(-\frac{1}{2})^2=-4a(-4)$

$\Rightarrow a=\frac{1}{64}$

$(1)\Rightarrow\ x^2=-4\left(\frac{1}{64}\right)y--\rightarrow(2)$

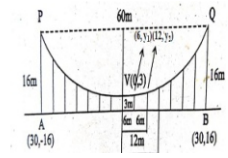
$(0.25,-y_1)$ ல்

$(2)\Rightarrow\left(\frac{1}{4}\right)^2=-4\times\frac{1}{64}(-y_1)\ \Rightarrow\frac{64}{4\times16}=y_1\Rightarrow y_1=1$

பாலத்தின் உயரம் $4-y_1=4-1=3\ \mathrm{m}$

7. **ஒரு தொங்கு பாலத்தின் 60மீ சாலைப்பகுதிக்கு பரவளைய கம்பி வடம் படத்தில் உள்ளவாறு பொறுத்தப்பட்டுள்ளது. செங்குத்துக்கம்பி வடங்கள் சாலைப்பகுதியில் ஒவ்வொன்றுக்கும் 6மீ இடைவெளி இருக்குமாறு அமைக்கப்பட்டுள்ளது. முனையிலிருந்து முதல் இரண்டு செங்குத்து கம்பி வடங்களுக்கான நீளத்தைக்காண்க.**

தீர்வு: $x^2=4ay------\rightarrow(1)$



$(30,13)$ல்

$30^2=4a(13)$

$\Rightarrow a=\frac{900}{52}$

$(1)\Rightarrow$

$x^2=4\times\frac{900}{52}y\Rightarrow x^2=\frac{900}{13}y---\rightarrow(2)$

(i) $\qquad$ $(6,y_1)$ ல்

$(2)\Rightarrow 6^2=\frac{900}{13}y_1\ \Rightarrow\frac{36\times13}{900}=y_1\Rightarrow y_1=0.52$

முதல் கம்பியின் நீளம் $3+y_1=3+0.52=3.52$

(ii) $\qquad$ $(12,y_2)$ ல்

$(2)\Rightarrow 12^2=\frac{900}{13}y_2\ \Rightarrow\frac{144\times13}{900}=y_2$

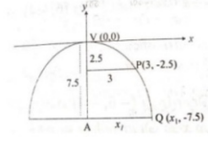
$\Rightarrow y_2=2.08$

இரண்டாம் கம்பியின் நீளம்

$3+y_2=3+2.08=5.08\ \mathrm{m}$

8. தரைமட்டத்திலிருந்து 7.5மீ உயரத்தில் தரைக்கு இணையாகப் பொருத்தப்பட்ட ஒரு குழாயிலிருந்து வெளியேறும் நீர்தரையைத் தொடும் பாதைஒரு பரவளையத்தை ஏற்படுத்துகிறது. மேலும் இந்தப் பரவளையப் பாதையின்முனைகுழாயின்வாயில் அமைகிறது. குழாய்மட்டத்திற்கு 2.5மீ கீழேநீரின்பாய்வானது குழாயின் முனை வழியாகச்செல்லும் நிலைகுத்துக்கோட்டிற்கு 3மீ தூரத்தில் உள்ளது. எனில் குத்துக் கோட்டிலிருந்து எவ்வளவு தூரத்திற்கு அப்பால் நீரானது தரையில் விழும் என்பதை காண்க.

தீர்வு: $x^2=-4ay---\rightarrow(1)$



$(3,-2.5)$, ல்

$(1)\Rightarrow(3)^2=-4a(-2.5)$

$\Rightarrow a=\frac{9}{10}$

$(1)\Rightarrow\ x^2=-4\left(\frac{9}{10}\right)y--\rightarrow(2)$

$(x_1,-7.5)$ல் $(2)\Rightarrow(x_1)^2=-4\times\frac{9}{10}(-7.5)$

$$\Rightarrow(x_1)^2=9\times3\Rightarrow x_1=3\sqrt{3}\ \mathrm{m}$$

9. **ஒரு ராக்கெட்வெடியானது கொளுத்தும்போது அது ஒரு பரவளையப் பாதையில் செல்கிறது. அதன்உச்ச உயரம் 4மீ-ஐ எட்டும்போது அது கொளுத்தப்பட்ட**

கணிதம்

இடத்திலிருந்து கிடைமட்டத் தூரம் 6மீ தொலைவிலுள்ளது. இறுதியாக கிடைமட்டமாக12மீ தொலைவில் தரையைவந்தடைகிறது. எனில் புறப்பட்ட இடத்தில் தரையுடன் ஏற்படுத்தப்படும் எறிகோணம் காண்க.

தீர்வு:

$x^2=-4ay ----\longrightarrow (1)$

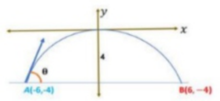
$(6,-4)$ ல்

$(1)\Rightarrow (6)^2=-4a(-4) \Rightarrow a=\frac{36}{16}=\frac{9}{4}$

$(1)\Rightarrow x^2=-4ay \Rightarrow x^2=-4\left(\frac{9}{4}\right)y$

$\Rightarrow x^2=-9y ----\longrightarrow (2)$

(2) $'x'$ஐ பொருத்து வகையிட



$\Rightarrow 2x=-9\frac{dy}{dx}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2x}{-9}$

$(-6,-4)$ ல் $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2(-6)}{-9}$

$\frac{dy}{dx}=tan\theta=\frac{4}{3}$

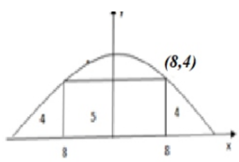
$\therefore \boldsymbol{\theta=tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)}$

10. **ஒரு நான்கு வழிச்சாலைக்கான மலைவழியேசெல்லும் சுரங்கப்பாதையின்முகப்பு ஒரு நீள்வட்ட வடிவமாகஉள்ளது. நெடுஞ்சாலையின் மொத்தஅகலம் (முகப்பு அல்ல) 16மீ. சாலையின்விளிம்பில் சுரங்கப்பாதையின்உயரம், 4மீ உயரமுள்ளசரக்கு வாகனம் செல்வதற்குத் தேவையான அளவிற்கும் முகப்பின்அதிகபட்ச உயரம் 5மீ ஆகவும் இருக்க வேண்டுமெனில் சுரங்கப்பாதையின் திறப்பின் அகலம் என்னவாக இருக்க வேண்டும்?**

தீர்வு:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1----\longrightarrow (1)$

இங்கு $b=5$



$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{5^2}=1---\longrightarrow (2)$

$(8,4)$ ல்

$(2)\Rightarrow \frac{8^2}{a^2}+\frac{4^2}{5^2}=1$

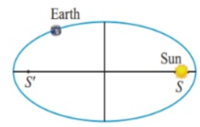
$\frac{8^2}{a^2}=1-\frac{16}{25}=\frac{25-16}{25}=\frac{9}{25}=\left(\frac{3}{5}\right)^2$

$\Rightarrow \frac{8}{a}=\frac{3}{5}\Rightarrow a=\frac{40}{3}$

திறப்பின் அகலம் $2a=\frac{80}{3}=26.66$ m

11. சூரியனிலிருந்து பூமியின் அதிகபட்சம் மற்றும் குறைந்தபட்ச தூரங்கள் முறையே 152×10^6 கி.மீ மற்றும் 94.5×10^6 கி.மீ. நீள்வட்டப் பாதையின் ஒரு குவியத்தில் சூரியன் உள்ளது. சூரியனுக்கும் மற்றொரு குவியத்திற்குமான தூரம் காண்க.

தீர்வு:



$SA'=a+c=152\times10^6$

$SA=a-c=94.5\times10^6$

$SA'-SA=2c=57.5\times10^6=575\times10^5$ km

சூரியனுக்கும் மற்றொரு குவியத்திற்கும் உள்ள தூரம்

$SS'=575\times10^5$ km.

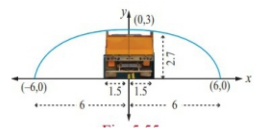
12.ஒரு வழிப்பாதையில் உள்ள அரை நீள்வட்ட வளைவின் உயரம் 3 m மற்றும் அகலம் 12 m ஒரு சரக்கு வாகனத்தின் அகலம் 3 m மற்றும் உயரம் 2.7 m எனில் இந்த வாகனம் வளைவின் வழி செல்ல முடியுமா?

தீர்வு:

$a=6$ மற்றும் $b=3$

நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{6^2}+\frac{y^2}{3^2}=1---\longrightarrow (1)$

$(\frac{3}{2},y_1)$ல் $(1)\Rightarrow \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$



$y_1^2=9\left(1-\frac{9}{144}\right)$

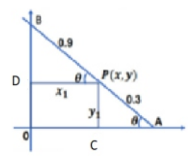
$y_1^2=\frac{135}{16}$

$y_1=\frac{\sqrt{135}}{4}=2.90m$

வாகனம் வளைவின் வழி செல்ல முடியும்.

13. 1.2 மீ நீளமுள்ளதடி அதன்முனைகள் எப்போதும் ஆய அச்சுகளைத் தொட்டுச் செல்லுமாறு நகருகின்றது. தடியின்x -அச்சு முனையிலிருந்து 0.3மீ தூரத்தில் உள்ளஒரு புள்ளி P-ன்நியமப்பாதைஒரு நீள்வட்டம் என நிறுவுக, மேலும் அதன் மையத்தொலைத்தகவும் காண்க.

தீர்வு:



Δ PAC

$sin\theta=\frac{y_1}{0.3}\Rightarrow sin^2\theta=\frac{{y_1}^2}{0.09}---\longrightarrow (1)$

Δ BPD

$cos\theta=\frac{x}{0.9}\Rightarrow cos^2\theta=\frac{{x_1}^2}{0.81}---\longrightarrow (2)$

$(1)^2+(2)^2\Rightarrow \frac{{x_1}^2}{0.81}+\frac{{y_1}^2}{0.09}=cos^2\theta+sin^2\theta=1$

(x_1,y_1)ன் நியமப்பாதை $\frac{x^2}{0.81}+\frac{y^2}{0.09}=1.$

நீள்வட்டமாகும்

மையத்தொலைத்தகவு $e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$

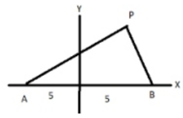
$=\sqrt{\frac{0.81-0.09}{0.81}}=\sqrt{\frac{0.72}{0.81}}$

$=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ m

கணிதம்

14. A , B என்ற இரு புள்ளிகள் 10கி.மீ இடைவெளியில் உள்ளன. இந்தப் புள்ளிகளில் வெவ்வேறு நேரங்களில் கேட்கப்பட்ட வெடிச்சத்தத்திலிருந்து வெடிச்சத்தம் உண்டான இடம் A என்ற புள்ளி B என்ற புள்ளியைவிட 6 கி.மீ அருகாமையில் உள்ளது என நிர்ணயிக்கப்பட்டது. வெடிச்சத்தம் உண்டான இடம் ஒரு குறிப்பிட்ட வளைவரைக்கு உட்பட்டது என நிரூபித்து அதன் சமன்பாட்டைக்காண்க.

தீர்வு:



$2ae = 10 \Rightarrow ae = 5$;

$2a = 6 \Rightarrow a = 3$

$3e = 5 \Rightarrow e = \frac{5}{3} > 1,$

∴ வளைவரை ஓர் அதிபரவளையமாகும்.

$b^2 = a^2(e^2 - 1) \Rightarrow b^2 = 9\left(\frac{25}{9} - 1\right)$

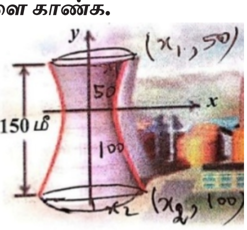
$\Rightarrow b^2 = 9\left(\frac{25-9}{9}\right) \Rightarrow b^2 = 16$

அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

15. ஒரு அணு உலைகுளிரூட்டும் தூணின்குறுக்கு வெட்டு அதிபரவளைய வடிவில் உள்ளது. மேலும் அதன் சமன்பாடு $\frac{x^2}{30^2} - \frac{y^2}{44^2} = 1$ தூண் 150மீ உயரமுடையது. மேலும் அதிபரவளையத்தின் மையத்திலிருந்து தூணின் மேல்பகுதிக்கான தூரம் மையத்திலிருந்து அடிப்பகுதிக்கு உள்ள தூரத்தில் பாதியாக உள்ளது. தூணின் மேற்பகுதி மற்றும் அடிப்பகுதியின் விட்டங்களை காண்க.

தீர்வு:



$\frac{x^2}{30^2} - \frac{y^2}{44^2} = 1 \longrightarrow (1)$

$(x_1, 50)$ ல்

$(1) \Rightarrow \frac{(x_1)^2}{30^2} - \frac{(50)^2}{44^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x_1)^2}{30^2} = 1 + \frac{(50)^2}{44^2}$

$$x_1 = 45.41m$$

∴ மேல்பகுதியின் விட்டத்திம் $2x_1 = 90.82\text{m}$

$(x_2, 100)$ ல்

$$(1) \Rightarrow \frac{(x_2)^2}{30^2} - \frac{(100)^2}{44^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x_2)^2}{30^2} = 1 + \frac{(100)^2}{44^2}$$

$$x_2 = 74.49m$$

∴ கீழ் பகுதியின் விட்டம் $2x_2 = 148.98m$

கலப்பு எண்கள்

முக்கிய குறிப்புகள்:

1. $i = \sqrt{-1}, i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ i^{4n} = 1$

2. கலப்பெண்ணின் செவ்வக வடிவம் x + iy மெய்பகுதி x, கற்பனைபகுதி y.

3. z = x + iy ன் இணை கலப்பெண் $\bar{z}$= x −iy

4. $z = x + iy$ ன் மட்டு $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

5. முக்கோண சமனிலி: ஏதேனும் இரு கலப்பெண்கள் z_1 மற்றும் z_2 எனக , $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$&

$||z_1| - |z_2|| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

6. $\sqrt{a \pm ib} = \pm\left[\sqrt{\frac{|z| + a}{2}} \pm i\sqrt{\frac{|z| - a}{2}}\right]$

7. z ன் கூட்டல் நேர்மாறு $-z$, **z ன் பெருக்கல் நேர்மாறு** $\frac{1}{z}$

8. z மெய்யெண் எனில் ⇔ $z = \bar{z}$ மற்றும்

z முற்றிலும் கறெபனை எனில் ⇔ $z = -\bar{z}$

9. z_1 மற்றும் z_2 ஆகிய கலப்பெண்களுக்கு இடைப்பட்ட தூரம் $|z_1 - z_2|$

10. வட்டத்தின் கலப்பெண் வடிவம் $|z - z_0| = r$ இங்கு மையம் z_0 மற்றும் ஆரம் r.

5 Marks

1. $z = x + iy$ என்ற கலப்பெண்ணிற்கு $\left|\frac{z-4i}{z+4i}\right| = 1$ எனில், z ன் நியம்பாதை மெய்யச்சு எனக் காட்டுக.

தீர்வு:

$$z = x + iy$$

$\left|\frac{z - 4i}{z + 4i}\right| = 1 \Rightarrow |z - 4i| = |z + 4i|$

$|x + iy - 4i| = |x + iy + 4i|$

$|x + i(y - 4)|^2 = |x + i(y + 4)|^2$

$x^2 + (y - 4)^2 = x^2 + (y + 4)^2$

$y = 0$

∴ z ன் நியம்பாதை மெய்யச்சு ஆகும்

2. $z = x + iy$ என்ற கலப்பெண்ணிற்கு $Im\left(\frac{2z+1}{iz+1}\right) = 0$, எனில் , z ன் நியம்பாதை $2x^2 + 2y^2 + x - 2y = 0$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு:

$Im\left(\frac{2z+1}{iz+1}\right) = 0$ $\quad$ $z = x + iy$ எனக

$Im\left(\frac{2(x+iy)+1}{i(x+iy)+1}\right) = 0$

$Im\left(\frac{2x+i2y+1}{ix+i^2y+1}\right) = 0$ $\quad$ $Im\left(\frac{a+ib}{c+id}\right) = \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$

$$Im\left(\frac{(2x+1)+i2y}{(1-y)+ix}\right)=0$$

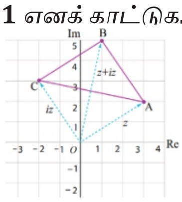
$$\left(\frac{2y(1-y)-x(2x+1)}{(1-y)^2+x^2}\right)=0$$

$$2y-2x^2-2y^2-x=0 \quad \text{(or)}$$

$$2x^2+2y^2+x-2y=0$$

3. $z=x+iy$ என்ற கலப்பெண்ணிற்கு $Re\left(\frac{z-1}{z+1}\right)=0$ எனில் , z ன் நியம்பாதை $x^2+y^2=1$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு:



$Re\left(\frac{z-1}{z+1}\right)=0 \quad z=x+iy$ என்க

$$Re\left(\frac{x+iy-1}{x+iy+1}\right)=0$$

$$Re\left(\frac{(x-1)+iy}{(x+1)+iy}\right)=0 \qquad \boldsymbol{Re\left(\frac{a+ib}{c+id}\right)=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}}$$

$$\left(\frac{(x-1)(x+1)+y^2}{(x+1)^2+y^2}\right)=0$$

$$\boldsymbol{x^2-1+y^2=0 \implies x^2+y^2=1}$$

4. $z=x+iy$ என்ற கலப்பெண்ணிற்கு $arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right)=\frac{\pi}{2}$ எனில், z ன் நியம்பாதை $x^2+y^2=1$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

$arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right)=\frac{\pi}{2} \qquad z=x+iy$ என்க

$$arg\left(\frac{x+iy-1}{x+iy+1}\right)=\frac{\pi}{2}$$

$$arg\left(\frac{(x-1)+iy}{(x+1)+iy}\right)=\frac{\pi}{2} \qquad \boldsymbol{\arg\left(\frac{a+ib}{c+id}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{bc-ad}{ac+bd}\right)}$$

$$tan^{-1}\left(\frac{y(x+1)-y(x-1)}{(x-1)(x+1)+y^2}\right)=\frac{\pi}{2}$$

$$\left(\frac{y(x+1)-y(x-1)}{(x-1)(x+1)+y^2}\right)=tan\frac{\pi}{2}=\infty=\frac{1}{0}$$

$$(x-1)(x+1)+y^2=0$$

$$\boldsymbol{x^2-1+y^2=0 \implies x^2+y^2=1}$$

5. $z=x+iy$ என்ற கலப்பெண்ணிற்கு $arg\left(\frac{z-i}{z+2}\right)=\frac{\pi}{4}$, எனில், z ன் நியம்பாதை $x^2+y^2+3x-3y+2=0$ எனக்காட்டுக.

தீர்வு:

$arg\left(\frac{z-i}{z+2}\right)=\frac{\pi}{4} \qquad z=x+iy$ என்க

$$arg\left(\frac{x+iy-i}{x+iy+2}\right)=\frac{\pi}{4}$$

$$arg\left(\frac{x+i(y-1)}{(x+2)+iy}\right)=\frac{\pi}{4} \qquad \boldsymbol{\arg\left(\frac{a+ib}{c+id}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{bc-ad}{ac+bd}\right)}$$

$$tan^{-1}\left(\frac{(x+2)(y-1)-xy}{x(x+2)+y(y-1)}\right)=\frac{\pi}{4}$$

$$\left(\frac{(x+2)(y-1)-xy}{x(x+2)+y(y-1)}\right)=tan\frac{\pi}{4}=1$$

$$(x+2)(y-1)-xy=x(x+2)+y(y-1)$$

$$\boldsymbol{x^2+y^2+3x-3y+2=0}$$

செய்து பார்க்க

$z=x+iy$ என்ற கலப்பெண்ணிற்கு $arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right)=\frac{\pi}{3}$, எனில், z ன் நியம்பாதை $\sqrt{3}x^2+\sqrt{3}y^2-2y-3=0$ எனக்காட்டுக.

6. $z=3+2i$ எனில், z, iz, மற்றும் $z+iz$ ஆகியன ஓர் இருசமபக்க செங்கோணமுக்கோணத்தின் முனைப்புள்ளிகள் என நிறுவுக

தீர்வு:

$$z=3+2i$$

$$iz=i(3+2i)=3i-2=-2+3i$$

$$z+iz=1+5i$$

$z_1=3+2i\ , \quad z_2=-2+3i\ , \quad z_3=1+5i$ என்க

$$AB=|z_1-z_2|=\left|(3+2i)-(-2+3i)\right|$$

$$=|5-i|=\sqrt{(5)^2+(-1)^2}=\boldsymbol{\sqrt{26}}$$

$$BC=|z_2-z_3|=|(-2+3i)-(1+5i)|$$

$$=|-3-2i|=\sqrt{(-3)^2+(-2)^2}=\boldsymbol{\sqrt{13}}$$

$$CA=|z_3-z_1|=|(1+5i)-(3+2i)|$$

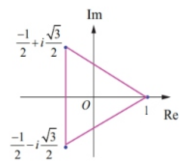
$$=|-2+3i|=\sqrt{(-2)^2+(3)^2}=\boldsymbol{\sqrt{13}}$$

$$BC^2+CA^2=AB^2=26$$

∴ இருசமபக்க செங்கோணமுக்கோணத்தின் முனைப்புள்ளிகள் ஆகும்.

7. $1, \frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ மற்றும் $\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ஆகியன ஓர் சமபக்க முக்கோணத்தின் முனைப் புள்ளிகள் என நிறுவுக

தீர்வு:



$$z_1=1 \quad z_2=\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad z_3=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$AB=|z_1-z_2|=\left|1-\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right|$$

$$=\boldsymbol{\sqrt{3}}$$

$$BC=|\boldsymbol{z_2-z_3}|=\left|\left(\frac{-1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{-1}{2}-\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right|=\left|0+i\sqrt{3}\right|=\sqrt{3}$$

$$CA=|z_3-z_1|=\left|\left(\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-1\right|=\left|\frac{-3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\boldsymbol{\sqrt{3}}$$

AB=BC=CA

∴ சமபக்க முக்கோணத்தின் முனைப் புள்ளிகள் ஆகும்

8. z_1, z_2 மற்றும் z_3ஆகிய கலப்பெண்களில் $|z_1|=1, |z_2|=2,\ |z_3|=3$ மற்றும் $|z_1+z_2+z_3|=1$, எனில் $|9z_1z_2+4z_1z_3+z_yz_3|=6$ என காட்டுக.

தீர்வு:

$|z_1|=1, |z_2|=2,\ |z_3|=3$ மற்றும் $|z_1+z_2+z_3|=1$

$$\because |z|^2=z\bar{z},\ z_1\overline{z_1}=1, z_2\overline{z_2}=4\ \ , z_3\overline{z_3}=9$$

$$z_1=\frac{1}{\overline{z_1}}\ , z_2=\frac{4}{\overline{z_2}}\ , z_3=\frac{9}{\overline{z_3}}$$

கணிதம்

$|z_1+z_2+z_3| = \left|\frac{1}{z_1}+\frac{4}{z_2}+\frac{9}{z_3}\right|$

$$1 = \frac{|z_2z_3+4z_1z_3+9z_1z_2|}{|z_1||z_2||z_3|}$$

$|z_2z_3+4z_1z_3+9z_1z_2| = |z_1||z_2||z_3|$

$$=1\times 2\times 3 = 6$$

9. z_1, z_2 மற்றும் z_3 ஆகிய கலப்பெண்களில் $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r > 0$ மற்றும் $z_1+z_2+z_3 \neq 0$ எனில், $\left|\frac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1+z_2+z_3}\right| = r$ என காட்டுக.

தீர்வு:

$|z_1| = |z_2| = |z_3| = r \qquad \because |z|^2 = z\bar{z}$

$z_1\overline{z_1} = z_2\overline{z_2} = z_3\overline{z_3} = r^2$

$z_1 = \frac{r^2}{\overline{z_1}}, z_2 = \frac{r^2}{\overline{z_2}}, z_3 = \frac{r^2}{\overline{z_3}}$

$|z_1+z_2+z_3| = \left|\frac{r^2}{\overline{z_1}}+\frac{r^2}{\overline{z_2}}+\frac{r^2}{\overline{z_3}}\right|$

$= r^2\left|\frac{\overline{z_1}\,\overline{z_2}+\overline{z_2}\,\overline{z_3}+\overline{z_3}\,\overline{z_1}}{\overline{z_1}\,\overline{z_2}\,\overline{z_3}}\right|$

$|z_1+z_2+z_3| = r^2\frac{|z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3|}{r^3}$

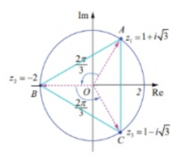
$= \frac{|z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3|}{r}$

$\therefore \quad \left|\frac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1+z_2+z_3}\right| = r$

10. z_1, z_2 & z_3 ஆகியன $|z| = 2$ என்ற வட்டத்தின் மீது அமைந்த சமபக்கமுக்கோணத்தின் உச்சிப்புள்ளிகள் என்க. மேலும் $z_1 = 1+i\sqrt{3}$, எனில் z_2 & z_3 காண்க.

தீர்வு:

$|z| = r = 2$ மற்றும்



$z_1 = 1+i\sqrt{3};$

$\theta = \alpha = tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ ஆய்லரின் வடிவம் $z_1 = re^{i\theta} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

z_2 என்பது z_1 ஐ எதிர்கடிகார திசையில் $\frac{2\pi}{3}$ சுழற்ற கிடைக்கும்

$z_2 = z_1e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2e^{i\pi} = -2$

z_3 என்பது z_2 ஐ எதிர்கடிகார திசையில் $\frac{2\pi}{3}$ சுழற்ற கிடைக்கும்

$\boldsymbol{z_3 = z_2e^{i\frac{2\pi}{3}} = -2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1-i\sqrt{3}}$

குறிப்பு :

$\boldsymbol{z = (1)^{\frac{1}{3}} = (1,\omega,\omega^2)}$

இங்கு $\boldsymbol{\omega = \frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, \omega^2 = \frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

11. தீர்க்க $z^3+8i = 0$, இங்கு $z \in C$.

தீர்வு: $z^3+8i = 0$

$z^3 = -8i$

$z^3 = (2i)^3\times 1$

$z = 2i\times(1)^{\frac{1}{3}}$

$z = 2i(1,\omega,\omega^2)$

$z = 2i,\ 2i\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ 2i\left(\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\boldsymbol{z = 2i, -i-\sqrt{3}, \quad -i+\sqrt{3}}$

12. தீர்க்க $z^3+27 = 0$, இங்கு $z \in C$

தீர்வு: $z^3+27 = 0$

$z^3 = -27 = -3\times -3\times -3$

$z^3 = (-3)^3\times 1$

$z = -3\times(1)^{\frac{1}{3}}$

$z = -3(1,\omega,\omega^2)$

Z=$-3, -3\omega, -3\omega^2$

13. $\omega \neq 1$ ஒன்றின் மூப்படி மூலம் எனில், $(z-1)^3+8 = 0$ ன் மூலங்கள் $-1, 1-2\omega, 1-2\omega^2$ என நிரூபி.

தீர்வு:

$(z-1)^3+8 = 0$

$(z-1)^3 = -8 = (-2)^3\times 1$

$(z-1) = -2\times(1)^{\frac{1}{3}}$

$z-1 = -2(1,\omega,\omega^2) = -2, -2\omega, -2\omega^2$

Z=$-1, 1-2\omega, 1-2\omega^2$

14. $\sqrt{3}+i$ ன் எல்லா மூன்றாம் படி மூலங்களையும் காண்க.

தீர்வு:

$z^3 = re^{i\theta} \Rightarrow z = \left(re^{i\theta}\right)^{\frac{1}{3}}$

$z = \left(\sqrt{3}+i\right)^{\frac{1}{3}}$

$r = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(1)^2} = 2,$

$\theta = \alpha = tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

$\sqrt{3}+i = 2cis\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$\left(\sqrt{3}+i\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)} = 2^{\frac{1}{3}}cis\left(\frac{(12k+1)\pi}{18}\right)$

$k = 0, \qquad z = 2^{\frac{1}{3}}cis\left(\frac{\pi}{18}\right)$

கணிதம்

$k = 1, \quad z = 2^{\frac{1}{3}} cis(\frac{13\pi}{18})$

$k = 2, \quad z = 2^{\frac{1}{3}} cis(\frac{25\pi}{18})$

15. $\boldsymbol{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 0}$ **எனில்,**

(i) $\boldsymbol{\cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3\gamma = 3\cos(\alpha+\beta+\gamma)}$

(ii) $\boldsymbol{\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma = 3\sin(\alpha+\beta+\gamma)}$

எனக் காட்டுக.

தீர்வு:

$a = \cos\alpha + i\sin\alpha,\ b = \cos\beta + i\sin\beta,\ c = \cos\gamma + i\sin\gamma$

$\boldsymbol{a+b+c = 0}$ **எனில்** $\boldsymbol{a^3+b^3+c^3 = 3abc}$

$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 + (\cos\beta + i\sin\beta)^3(\cos\gamma + i\sin\gamma)^3$
$= 3(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)(\cos\gamma + i\sin\gamma)$

$(\cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3\gamma) + i(\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma)$
$= 3[\cos\ (\alpha+\beta+\gamma) + i\sin(\alpha+\beta+\gamma)]$

$(i)\ \cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3\gamma = 3\cos(\alpha+\beta+\gamma)$

$(ii)\ \sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma = 3\sin(\alpha+\beta+\gamma)$

16. $\boldsymbol{2\cos\alpha = x + \frac{1}{x}}$ **மற்றும்** $\boldsymbol{2\cos\beta = y + \frac{1}{y}}$ **எனில்,**

(i) $\boldsymbol{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2\cos(\alpha-\beta)}$

(ii) $\boldsymbol{xy - \frac{1}{xy} = 2i\sin(\alpha+\beta)}$

(iii) $\boldsymbol{\frac{x^m}{y^n} - \frac{y^n}{x^m} = 2i\sin(m\alpha - n\beta)}$

(iv) $\boldsymbol{x^m y^n + \frac{1}{x^m y^n} = 2\cos(m\alpha + n\beta)}$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

$x + \frac{1}{x} = 2cos\alpha$ எனவே

$x = cos\alpha + isin\alpha,$

அதேபோல் $y = cos\beta + isin\beta$

(i) $\frac{x}{y} = cos(\alpha-\beta) + isin(\alpha-\beta)$

$\frac{y}{x} = cos(\alpha-\beta) - isin(\alpha-\beta)$

$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2cos(\alpha-\beta)$

(ii) $xy = cos(\alpha+\beta) + isin(\alpha+\beta)$

$\frac{1}{xy} = cos(\alpha+\beta) - isin(\alpha+\beta)$

$xy - \frac{1}{xy} = 2isin(\alpha+\beta)$

(iii) $\frac{x^m}{y^n} = cos(m\alpha - n\beta) + isin(m\alpha - n\beta)$

$\frac{y^n}{x^m} = cos(m\alpha - n\beta) - isin(m\alpha - n\beta)$

$\frac{x^m}{y^n} - \frac{y^n}{x^m} = 2isin(m\alpha - n\beta)$

(iv) $x^m y^n = cos(m\alpha + n\beta) + isin(m\alpha + n\beta)$

$\frac{1}{x^m y^n} = cos(m\alpha + n\beta) - isin(m\alpha + n\beta)$

$x^m y^n + \frac{1}{x^m y^n} = 2cos(m\alpha + n\beta)$

2 ,3 Mark

1.மதிப்பிடுக

தீர்வு:

(i) $i^{1729} = i$

(ii) $i^{-1924} + i^{2018} = i^0 + i^2 = 1 - 1 = 0;$

(iii) $i^{59} + \frac{1}{i^{59}} = i^{59} - i^{59} = 0$

(iv) $ii^2 i^3 \ldots\ldots i^{40} = i^{1+2+3+\cdots+40}$

$= i^{\left(\frac{40\times 41}{2}\right)} = i^{820} = 1$

2. $\boldsymbol{z_1 = 6 + 7i,\quad z_2 = 3 - 5i}$ எனில்

தீர்வு:

$z_1 + z_2 = (6+3) + i(7-5) = 9 + 2i$

$z_1 - z_2 = (6-3) + i(7+5) = 3 + 12i$

$z_1 z_2 = (6+7i)(3-5i) = 18 - 30i + 21i - 35(-1)$

$= 53 - 9i$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{6+7i}{3-5i} = \frac{-17+51i}{34} = \frac{-17}{34} + \frac{51i}{34}$ $\quad \boldsymbol{\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(ac+bd)+i\,(bc-ad)}{c^2+d^2}}$

3. $\boldsymbol{\left(\frac{19-7i}{9+i}\right)^{12} + \left(\frac{20-5i}{7-6i}\right)^{12}}$ ஓர் மெய் எனக்காட்டுக

தீர்வு:

$\frac{19-7i}{9+i} = 2 - i\ ,\ \frac{20-5i}{7-6i} = 2 + i$

$z = \left(\frac{19-7i}{9+i}\right)^{12} + \left(\frac{20-5i}{7-6i}\right)^{12}$

$z = (2-i)^{12} + (2+i)^{12}$

$\bar{z} = (2+i)^{12} + (2-i)^{12}$

$\boldsymbol{\bar{z} = z}$ **, $\boldsymbol{z}$ மெய்**

4. $\boldsymbol{\left(\frac{19+9i}{5-3i}\right)^{15} - \left(\frac{8+i}{1+2i}\right)^{15}}$ முற்றிலும் கற்பனை எனக்காட்டுக

கணிதம்

தீர்வு:

$\frac{19+9i}{5-3i} = 2+3i, \frac{8+i}{1+2i} = 2-3i$

$z = \left(\frac{19+9i}{5-3i}\right)^{15} - \left(\frac{8+i}{1+2i}\right)^{15}$

$z = (2+3i)^{15} - (2-3i)^{15}$

$\bar{z} = (2-3i)^{15} - (2+3i)^{15}$

$\bar{z} = -z$

$\therefore z$ முற்றிலும் கற்பனை.

5. $z = 3+4i$ **எனில்,** z^{-1} **காண்க**

தீர்வு:

$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{3+4i} = \frac{3-4i}{3^2+4^2} = \frac{3-4i}{25}$

$= \frac{3}{25} + \frac{-4i}{25}$ $\qquad \frac{1}{a+ib} = \frac{(a-ib)}{a^2+b^2}$

6. $z = (2+3i)(1-i)$ **எனில்,** z^{-1} **காண்க**

தீர்வு:

$z = 2-2i+3i+3i(-i) = 2+i-3 = -1+i$

$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{-1+i} = \frac{-1-i}{(-1)^2+1^2}$

$= \frac{-1-i}{2} = \frac{-1}{2} - \frac{i}{2}$

7. $z_1 = 3, \; z_2 = -7i, \; z_3 = 5+4i$ **எனில்**

$z_1(z_2+z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$ **எனக்காட்டுக**

தீர்வு:

$z_2+z_3 = -7i + (5+4i) = 5-3i$

$z_1(z_2+z_3) = 3(5-3i) = 15-9i \longrightarrow (1)$

$z_1z_2 + z_1z_3 = 3(-7i) + 3(5+4i) = -21i + 15 + 12i$

$= 15 - 9i \longrightarrow (2)$

$(1),(2) \Rightarrow z_1(z_2+z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$

8. $i, -2+i$ **மற்றும்** 3 **ஆகியவற்றில் எந்த கலப்பெண் ஆதியிலிருந்து அதிக தொலைவில் உள்ளது?**

தீர்வு:

$z_1 = i, \; z_2 = -2+i, \; z_3 = 3$

$|z_1| = |i| = \sqrt{1^2} = 1$

$|z_2| = |-2+i| = \sqrt{(-2)^2+1^2} = \sqrt{5}$

$|z_3| = |3| = 3$

தொலைவிலுள்ள புள்ளி 3 மற்றும் அருகிலுள்ள புள்ளி i

9. $10-8i$, $11+6i$ **ஆகியவற்றில் எப்புள்ளி** $1+i$ **க்கு அருகாமையில் உள்ளது.**

தீர்வு:

$z_1 = 10-8i, \; z_2 = 11+6i,$ மற்றும் $z = 1+i$

$|z_1 - z| = |(10-8i)-(1+i)| = |9-9i|$

$= \sqrt{9^2+(-9)^2} = \sqrt{162}$

$|z_2 - z| = |(11+6i)-(1+i)| = |10+5i|$

$= \sqrt{10^2+5^2} = \sqrt{125}$

$1+i$ க்கு **அருகாமையில் உள்ள புள்ளி** $11+6i$.

9. $(1+i)(1+2i)(1+3i)\ldots\ldots(1+ni) = x+iy$ **எனில்** $2.5.10\ldots\ldots(1+n^2) = x^2+y^2$ **என நிரூபி.**

தீர்வு:

$|(1+i)(1+2i)(1+3i)\ldots\ldots(1+ni)| = |x+iy|$

$|(1+i)||(1+2i)||(1+3i)|\ldots\ldots|(1+ni)| = |x+iy|$

$\left(\sqrt{1^2+1^2}\right)\left(\sqrt{1^2+2^2}\right)\left(\sqrt{1^2+3^2}\right)\ldots\ldots\left(\sqrt{1^2+n^2}\right)$

$= \sqrt{x^2+y^2}$

$\left(\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{10}\right)\ldots\ldots\left(\sqrt{1^2+n^2}\right) = \sqrt{x^2+y^2}$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த

$2.5.10\ldots\ldots(1+n^2) = x^2+y^2$

கலப்பு எண்ணின் வர்க்க மூலம்

$z = x \pm iy$ எனில்,

$\sqrt{z} = \sqrt{x \pm iy} = \pm\left(\sqrt{\frac{|z|+x}{2}} \pm i\sqrt{\frac{|z|-x}{2}}\right)$

10. $6-8i$ **மற்றும்** $4+3i$ **ன் வர்க்க மூலம் காண்க.**

தீர்வு: $|6-8i| = \sqrt{(6)^2+(-8)^2} = \sqrt{100}$

$|z| = 10$

$\sqrt{6-8i} = \pm\left(\sqrt{\frac{10+6}{2}} - i\sqrt{\frac{10-6}{2}}\right)$

$= \pm\left(\sqrt{\frac{16}{2}} - i\sqrt{\frac{4}{2}}\right)$

$= \pm\left(\sqrt{8} - i\sqrt{2}\right)$

$= \pm\left(2\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)$

$|4+3i| = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25}$

$|z| = 5$

$\sqrt{4+3i} = \pm\left(\sqrt{\frac{5+4}{2}} + i\sqrt{\frac{5-4}{2}}\right)$

$= \pm\left(\sqrt{\frac{9}{2}} + i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$

$= \pm\left(\frac{3}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

செய்து பார்க்க :

கணிதம்

$-6+8i, -5-12i$ வர்க்க மூலம் காண்க.

11. z, iz, மற்றும் z+iz ஆகியவற்றை முனைப்புள்ளிகளாக கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு 50 ச.அ எனில். $|z|$ன் மதிப்பு காண்க

தீர்வு: முக்கோணத்தின் பரப்பு $= \frac{1}{2}|z|^2 = 50$

$$|z|^2 = 100 \implies |z| = 10$$

12. $|z| = 2$ எனில் $3 \le |z+3+4i| \le 7$ எனக்காட்டுக

தீர்வு:

$$||z| - |3+4i|| \le |z+3+4i| \le |z| + |3-4i|$$

$$|2-5| \le |z+3+4i| \le 2+5$$

$$|-3| \le |z+3+4i| \le 7$$

$$3 \le |z+3+4i| \le 7$$

13. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = 1$ எனில் n ன் மதிப்பு காண்க

தீர்வு:

$$\frac{1+i}{1-i} = i$$

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = i^n = 1$$

சாத்தியமான n ன் மதிப்புகள் 4,8,12,....

13. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 - \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 = -2i$ எனக்காட்டுக

தீர்வு:

$$\frac{1+i}{1-i} = i \;,\; \frac{1-i}{1+i} = -i$$

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 - \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 = i^3 - (-i)^3 = -i - i = -2i$$

14. சுருக்குக $(i)(1+i)^{18}$ (ii) $\left(-\sqrt{3}+3i\right)^{31}$

தீர்வு:

(i) $(1+\mathrm{i})^{18} = ((1+\mathrm{i})^2)^9$

$$= (2\mathrm{i})^9$$

$$= 512\mathrm{i}$$

(ii) $\left(-\sqrt{3}+3\mathrm{i}\right)^{31} = \left[2\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)\right]^{31}$

$$= \left(2\sqrt{3}\right)^{31}\omega^{31} = \left(2\sqrt{3}\right)^{31}\omega$$

$$= \left(2\sqrt{3}\right)^{31}\left(\frac{-1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

14. சுருக்குக $\left[\frac{1+cos2\theta+isin2\theta}{1+cos2\theta-isin2\theta}\right]^{30}$

தீர்வு: $\left[\frac{1+cos2\theta+isin2\theta}{1+cos2\theta-isin2\theta}\right] = cos2\theta + isin2\theta$

$$\left[\frac{1+cos2\theta+isin2\theta}{1+cos2\theta-isin2\theta}\right]^{30} = (cos2\theta + isin2\theta)^{30}$$

$$= (cos60\theta + isin60\theta)$$

15. $|z+i| = |z-1|$ எனில் z ன் நியம்பாதை காண்க

தீர்வு:

$$|z+i| = |z-1|$$

$$|x+iy+i| = |x+iy-1|$$

$$|x+i(y+1)| = |(x-1)+iy|$$

$$\sqrt{x^2+(y+1)^2} = \sqrt{(x-1)^2+y^2}$$

$$x^2+(y+1)^2 = (x-1)^2+y^2$$

$$x^2+y^2+2y+1 = x^2-2x+1+y^2$$

$$2x+2y = 0$$

$$x+y = 0$$

16. $\overline{3i} + \frac{1}{2-i}$ ஐ செவ்வக வடிவில் எழுதுக.

தீர்வு:

$$\overline{3i} + \frac{1}{2-i} = -3i + \frac{2+i}{5} \qquad \frac{1}{a+ib} = \frac{(a-ib)}{a^2+b^2}$$

$$= \frac{2-14i}{5} = \frac{2}{5} - \frac{14i}{5}$$

17. மதிப்பிடுக $\left|\frac{i(2+i)^3}{(1+i)^2}\right|$

தீர்வு:

$$\left|\frac{i(2+i)^3}{(1+i)^2}\right| = \frac{1\left(\sqrt{2^2+1^2}\right)^3}{\left(\sqrt{1^2+1^2}\right)^2} = \frac{\left(\sqrt{5}\right)^3}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

18. $v = 3-4i$ மற்றும் $w = 4+3i$ மேலும் $\frac{1}{u} = \frac{1}{v} + \frac{1}{w}$, எனில் u ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு: $\frac{1}{v} = \frac{1}{3-4i} = \frac{3+4i}{25}$ *hint:* $\frac{1}{a+ib} = \frac{(a-ib)}{a^2+b^2}$

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{4+3i} = \frac{4-3i}{25}$$

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = \frac{7+i}{25}$$

$$u = \frac{25}{7+i} = \frac{25(7-i)}{50} = \frac{7}{2} - \frac{i}{2}$$

19. $|3z-5+i| = 4$ என்ற சமன்பாடு வட்டத்தை குறிக்கிறது எனக்காட்டுக . மேலும் மையம், ஆரம் காண்க.

தீர்வு: $|3z-(5-i)| = 4$

$$\left|z - \left(\frac{5}{3} - \frac{i}{3}\right)\right| = \frac{4}{3}$$

மையம் $\left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ ஆரம் $\frac{4}{3}$

குறிப்பு : $|z - z_0| = r$

செய்து பார்க்க

(i) $|z+2-i| < 2,$ (ii) $|z-2-i| = 3$

(iii) $|2z+2-4i| = 2$ (iv) $|3z-6+12i| = 8$

20. $\omega \neq 1$ **ஒன்றின் முப்படி மூலமெனில்** $\frac{a+b\omega+c\omega^2}{b+c\omega+a\omega^2}+\frac{a+b\omega+c\omega^2}{c+a\omega+b\omega^2}=-1$ எனக்காட்டுக

தீர்வு: $\frac{a+b\omega+c\omega^2}{b+c\omega+a\omega^2}\times\frac{\omega}{\omega}+\frac{a+b\omega+c\omega^2}{c+a\omega+b\omega^2}\times\frac{\omega^2}{\omega^2}$

$$=\frac{\omega(a+b\omega+c\omega^2)}{a+b\omega+c\omega^2}+\frac{\omega^2(a+b\omega+c\omega^2)}{a+b\omega+c\omega^2}$$

$$=\omega+\omega^2=-1$$

21.ஒன்றின் நான்காம் படிமூலம் காண்க.

தீர்வு:

$$z^4=1$$
$$(z^2)^2=1$$
$$z^2=\pm\sqrt{1}$$
$$z^2=\pm 1$$

$z^2=1$ $\quad$ $z^2=-1$

$z=\pm\sqrt{1}$ $\quad$ $z=\pm\sqrt{-1}$

$\boldsymbol{z=\pm 1}$ $\quad$ $\boldsymbol{z=\pm i}$

22.ஒன்றின் முப்படி மூலம் காண்க.

தீர்வு:

$$z^3=1$$
$$z^3-1=0$$
$$(z-1)(z^2+z+1)=0$$

$z-1=0$ $\quad$ $z^2+z+1=0$

$\boldsymbol{z=1}$ $\quad$ $\boldsymbol{z=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}}$

23. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^5+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^5=-\sqrt{3}$ **எனக்காட்டுக**

தீர்வு:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^5+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^5=(-i\omega)^5+(i\omega^2)^5=-i\omega^2+i\omega$$

$$=-i\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+i\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=-\sqrt{3}$$

22. மதிப்பிடுக $\sum_{k=1}^{18}\left(\cos\frac{2k\pi}{9}+i\sin\frac{2k\pi}{9}\right)$

தீர்வு:

$$\sum_{k=0}^{8}\left(\cos\frac{2k\pi}{9}+i\sin\frac{2k\pi}{9}\right)=0$$

$$1+\sum_{k=1}^{8}\left(\cos\frac{2k\pi}{9}+i\sin\frac{2k\pi}{9}\right)=0$$

$$\sum_{k=1}^{8}\left(\cos\frac{2k\pi}{9}+i\sin\frac{2k\pi}{9}\right)=-1$$

23. $\omega \neq 1$ **ஒன்றின் முப்படி மூலம் எனில் பின்வருவனவற்றை சரிபார்**

(i) $\boldsymbol{(1-\omega+\omega^2)^6+(1+\omega-\omega^2)^6=128}$

(ii) $\boldsymbol{(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^4)\ldots\ldots(1+\omega^{2^{11}})=1}$

தீர்வு:

(i) $\quad (1-\omega+\omega^2)^6+(1+\omega-\omega^2)^6$

$$=(-\omega-\omega)^6+(-\omega^2-\omega^2)^6$$
$$=(-2\omega)^6+(-2\omega^2)^6$$
$$=64+64=128$$

(ii) $(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^8)\ldots\ldots(1+\omega^{2^{11}})$

$=[(-\omega^2)(-\omega)][(-\omega^2)(-\omega)]\ldots upto\ 6\ times$

$=1\times1\times1\times1\times1\times1=1$

24.முக்கோன சமனிலி எழுதி நிருபி

முக்கோன சமனிலி $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$

நிருபனம்:

$OA=|z_1|, OB=|z_2|, OC=|z_1+z_2|$

Δ OAC ல், $\quad OC<OA+AC$

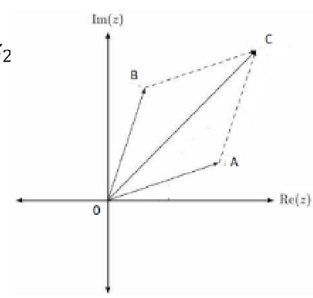
$|z_1+z_2|<|z_1|+|z_2|-----(1)$

O,A,C ஒரு கோட்டில் அமைந்தால்

$|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|----\rightarrow(2)$

From (1),(2)

$|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2$



தனிநிலைகணக்கியல்

5 MARK

முக்கிய குறிப்புகள்:

S ன் மீதான ஈருறுப்பு செயலி * என்க

i) **அடைவுப் பண்பு** : $\forall a,b\in S\Rightarrow a*b\in S$

ii) **பரிமாற்றுப் பண்பு**: $a*b=b*a\ ,\forall a,b\in S$

iii) **சேர்ப்புப் பண்பு** :

$$a*(b*c)=(a*b)*c\ ,\forall a,b,c\in S$$

iv) **சமனிப் பண்பு** : $a*e=e*a=a$, e என்பது சமனி உறுப்பாகும், $e\in S,\forall a\in S$

v) **எதிர்மறைப் பண்பு** : a ன் எதிர்மறை a^{-1}

$$a*\quad a^{-1}=a^{-1}*a=e,\quad a^{-1}\in S$$

1. **கொடுக்கப்பட்ட கணத்தின் மீது பின்வரும் செயலானது (i) அடைவுப் பண்பு (ii) பரிமாற்றுப் பண்பு (iii) சேர்ப்புப் பண்பு (iv) சமனிப் பண்பு மற்றும் (v) எதிர்மறைப் பண்பு ஆகியவைகளைப் பெற்றிருக்குமா எனச் சரிபார்க்க.**

$\boldsymbol{m*n=m+n-mn,\quad m,n\epsilon Z}$

தீர்வு:

அடைவுப் பண்பு:

$m,n\epsilon Z$, clearly $m+n-mn\ \epsilon Z$

∴ **அடைவுப் பண்பு உண்மை**

சேர்ப்புப் பண்பு:

$(l*m)*n$=$l*(m*n)$

$(l*m)*n=l+m+n-lm-mn-nl+lmn$

$=l*(m*n)$

∴ **சேர்ப்புப் பண்பு**

சமனிப் பண்பு:

$m*e=e*m=m$

$m+e-me=m$

$e=0\ \epsilon Z$

∴ **சமனிப் பண்பு உண்மை**

எதிர்மறைப் பண்பு:

$m*m^{-1}=m^{-1}*m=e=0$

$m^{-1}=\frac{-m}{1-m}\notin z$

∴ **எதிர்மறைப் பண்பு உண்மையல்ல**

பரிமாற்றுப் பண்பு:

$m*n=n*m=m+n-mn=n+m-nm$

∴ **பரிமாற்றுப் பண்பு**

2. **கொடுக்கப்பட்ட கணத்தின் மீது பின்வரும் செயலானது (i) அடைவுப் பண்பு (ii) பரிமாற்றுப் பண்பு (iii) சேர்ப்புப் பண்பு (iv) சமனிப் பண்பு மற்றும் (v) எதிர்மறைப் பண்பு ஆகிய பண்புகளை சரிபார்க்க.** $\boldsymbol{x*y=x+y-xy,\ \forall\ x,y\epsilon Q\setminus\{1\}}$.

தீர்வு:

அடைவுப் பண்பு:

$x,y\epsilon Q\setminus\{1\},\quad x\neq 1,\ y\neq 1$

$\Rrightarrow\ x+y-xy\neq 1$

$x*y\epsilon Q\setminus\{1\}$ ∴ **அடைவுப் பண்பு உண்மை**

சேர்ப்புப் பண்பு:

$(x*y)*z$=$x*(y*z)$

∴ **சேர்ப்புப் பண்பு உண்மை**

சமனிப் பண்பு:

$x*e=e*x=x$

$e=0\ \epsilon Q\setminus\{1\}$

∴ **சமனிப் பண்பு உண்மை**

எதிர்மறைப் பண்பு:

$x*x^{-1}=x^{-1}*x=e=0$

$x^{-1}=\frac{-x}{1-x}\epsilon Q\setminus\{1\}$

∴ **எதிர்மறைப் பண்பு உண்மை**

பரிமாற்றுப் பண்பு:

$x*y=x+y-xy=y+x-yx=y*x$

∴ **பரிமாற்றுப் பண்பு உண்மை**

3. **கொடுக்கப்பட்ட கணத்தின் மீது பின்வரும் செயலானது (i) அடைவுப் பண்பு (ii) பரிமாற்றுப் பண்பு (iii) சேர்ப்புப் பண்பு (iv) சமனிப் பண்பு மற்றும் (v) எதிர்மறைப் பண்பு ஆகியவற்றை சரிபார்க்க.** $\boldsymbol{M=\left\{\begin{pmatrix}x & x\\ x & x\end{pmatrix}\in R-\{0\}\right\}}$. **இங்கு * என்பது அணிப்பெருக்களை குறிக்கிறது**

தீர்வு:

அடைவுப் பண்பு:

Let, $A=\begin{pmatrix}x & x\\ x & x\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}y & y\\ y & y\end{pmatrix}\quad\because\ x,y\neq 0\Longrightarrow 2xy\neq 0$

$AB=\begin{pmatrix}2xy & 2xy\\ 2xy & 2xy\end{pmatrix}\epsilon M$

∴ **அடைவுப் பண்பு உண்மை**

பரிமாற்றுப் பண்பு :

$AB=\begin{pmatrix}2xy & 2xy\\ 2xy & 2xy\end{pmatrix}\ , BA=\begin{pmatrix}2yx & 2yx\\ 2yx & 2yx\end{pmatrix}$

$AB=BA$

∴ **பரிமாற்றுப் பண்பு உண்மை.**

சேர்ப்புப் பண்பு:

அணிப்பெருக்கல் சேர்ப்பு பண்பிற்கு உட்பட்டது எனவே சேர்ப்பு பண்பு உண்மை

சமனிப் பண்பு: $A*E=E*A=A$

$\begin{pmatrix}x & x\\ x & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e & e\\ e & e\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & x\\ x & x\end{pmatrix}$

$$2ex = x$$

$e = \frac{1}{2}$ $\therefore E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \epsilon M$

∴ சமனிப் பண்பு உண்மை

எதிர்மறைப் பண்பு:

$$A * A^{-1} = A^{-1} * A = E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$2ax = \frac{1}{2} \implies a = \frac{1}{4x}$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4x} & \frac{1}{4x} \\ \frac{1}{4x} & \frac{1}{4x} \end{pmatrix} \epsilon M$$

∴ எதிர்மறைப் பண்பு உண்மை

4. மட்டு 11ஐப் பொருத்து எச்சத் தொகுதிகளின் கணம் $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$-இன் உட்கணம் $A = \{1,3,4,5,9\}$-ன் மீது $\times_{11}$ என்ற செயலிக்கு (i) அடைவுப் பண்பு (ii) பரிமாற்றுப் பண்பு (iii) சேர்ப்புப் பண்பு (iv) சமனிப் பண்பு மற்றும் (v) எதிர்மறைப் பண்பு ஆகியவைகளைச் சரிபார்க்க.

தீர்வு:

$\times_{11}$	1	3	4	5	9
1	1	3	4	5	9
3	3	9	1	4	5
4	4	1	5	9	3
5	5	4	9	3	1
9	9	5	3	1	4

அடைவுப் பண்பு:

அட்டவணையிலிருந்து அடைவுப் பண்பு உண்மை.

பரிமாற்றுப் பண்பு:

அட்டவணையிலிருந்து பரிமாற்றுப் பண்பு உண்மை.

சேர்ப்புப் பண்பு:

$\times_{11}$ சேர்ப்பு பண்பிற்கு உட்பட்டது எனவே சேர்ப்பு விதி உண்மை.

சமனி பண்பு:

சமனி உறுப்பு $1\epsilon A$ ∴ சமனிப்பண்பு உண்மை

எதிர்மறை பண்பு:

1,3,4,5 மற்றும் 9 ன் **எதிர்மறை உறுப்புகள் முறையே** 1,4,3,9 மற்றும் 5 ஆகும்.

∴ எதிர்மறை பண்பு உண்மை

5. மட்டுக் கூட்டல் 5 செயலி அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி கணம் $\mathbb{Z}_5$-ன் மீது $+_5$ என்ற செயலிக்கு (i) அடைவுப் பண்பு (ii) பரிமாற்றுப் பண்பு (iii) சேர்ப்புப் பண்பு (iv) சமனிப் பண்பு மற்றும் (v) எதிர்மறைப் பண்பு ஆகியவைகளைச் சரிபார்க்க.

தீர்வு:

$Z_5 = \{0,1,2,3,4\}$

$+_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

அடைவுப் பண்பு:

அட்டவணையிலிருந்து அடைவுப் பண்பு உண்மை.

பரிமாற்றுப் பண்பு:

அட்டவணையிலிருந்து பரிமாற்றுப் பண்பு உண்மை.

சேர்ப்புப் பண்பு:

$+_5$ சேர்ப்பு பண்பிற்கு உட்பட்டது எனவே சேர்ப்பு விதி உண்மை.

சமனி பண்பு:

சமனி உறுப்பு $0\epsilon Z_5$ ∴ சமனிப்பண்பு உண்மை

எதிர்மறை பண்பு:

0,1,2,3 மற்றும் 4 ன் **எதிர்மறை உறுப்புகள் முறையே** 0,4,3,2 மற்றும் 1 ஆகும்.

∴ எதிர்மறை பண்பு உண்மை

6. கொடுக்கப்பட்ட கணத்தின் மீது பின்வரும்

(i) அடைவு (ii) பரிமாற்றுப் (iii) சேர்ப்புப் (iv) சமனி மற்றும்

(v) எதிர்மறை பண்பு ஆகியவைகளைப் பெற்றிருக்குமா எனச்

சரிபார்க்க. $\boldsymbol{a * b = \frac{a+b}{2} \forall\ a, b \epsilon Q}$

தீர்வு:

அடைவுப் பண்பு:

$a, b \epsilon Q$ எனில் $\implies \frac{a+b}{2} \epsilon Q$

∴ அடைவுப் பண்பு உண்மை

சேர்ப்புப் பண்பு:

$(a*b)*c = \frac{a+b+2c}{4}$

$a*(b*c) = \frac{2a+b+c}{4}$

$(a*b)*c \neq a*(b*c)$

∴ சேர்ப்புப் பண்பு உண்மையில்லை

சமனிப் பண்பு:

$a*e = e*a = a$

$a*e = a$

$\frac{a+e}{2} = a$

$e = a$

ஒருமைத்தன்மையை பூர்த்தி செய்யவில்லை

∴ சமனிப்பண்பு உண்மையில்லை

எதிர்மறைப்பண்பு:

∴ எதிர்மறைப்பண்பு உண்மையில்லை

பரிமாற்றுப்பண்பு:

$a*b = b*a = \frac{a+b}{2}$

∴ பரிமாற்றுப்பண்பு உண்மை

2,3 Marks

1. ஒரு இயற்கணித அமைப்பில் சமனி உறுப்பு ஒருமைத்தன்மை வாய்ந்தது

தீர்வு

e_1 மற்றும் e_2 என்பன சமனி உறுப்புகள் என்க

$$a*e_1 = e_1*a = a \qquad \forall a \in S$$

$$a*e_2 = e_2*a = a \qquad \forall a \in S$$

$$a*e_1 = a*e_2$$

$$\therefore e_1 = e_2$$

2. ஒரு இயற்கணித அமைப்பில் எதிர்மறைஉறுப்பு ஒருமைத்தன்மை வாய்ந்தது

தீர்வு:

a_1 மற்றும் a_2 என்பன a ன் சமனி உறுப்புகள் என்க

$$a*a_1 = a_1*a = e \qquad \forall a \in S$$

$$a*a_2 = a_2*a = e \qquad \forall a \in S$$

$$a*a_1 = a*a_2$$

$$a_1 = a_2$$

3. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ஆகிய இரண்டும் ஒரே வகையான பூலியன் அணிகள் எனில், $A \vee B$ மற்றும் $A \wedge B$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு:

$$A \vee B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \wedge B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

செய்து பார்க்க : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **ஆகிய மூன்றும் ஒரே வகையான பூலியன் அணிகள் எனில்,** (i) $A \vee B$ (ii) $A \wedge B$ (iii) $(A \vee B) \wedge C$ (iv) $(A \wedge B) \vee C$ **ஆகியவற்றைக் காண்க.**

4. $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$ எனக் காட்டுக

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$$

5. $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg q \wedge \neg p)$ எனக் காட்டுக

p	q	$p \leftrightarrow q$	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg q \wedge \neg p$	$(p \wedge q) \vee (\neg q \wedge \neg p)$
T	T	T	F	F	T	F	T
T	F	F	F	T	F	F	F
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	T	F	T	T

$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg q \wedge \neg p)$

6. $p \rightarrow (\neg q \vee r) \equiv \neg p \vee (\neg q \vee r)$ எனக் காட்டுக

P	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \vee r$	$p \rightarrow (\neg q \vee r)$	$\neg p \vee (\neg q \vee r)$
T	T	T	F	F	T	T	T
T	T	F	F	F	F	F	F
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	F	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

$p \rightarrow (\neg q \vee r) \equiv \neg p \vee (\neg q \vee r)$

7. $p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$ எனக் காட்டுக

p	q	r	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow r$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T	F
T	F	T	T	T	F	T
T	F	F	T	T	F	T
F	T	T	T	T	F	T
F	T	F	F	T	F	T
F	F	T	T	T	F	T
F	F	F	T	T	F	T

$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$

8. மெய்யட்டவணையை பயன்படுத்தி $\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q)$ மற்றும் $\neg p$ **சமானமானவை** எனக் காட்டுக.

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge q$	$\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q)$
T	T	F	T	F	F	F
T	F	F	T	F	F	F
F	T	T	T	F	T	T
F	F	T	F	T	F	T

$\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q)$ மற்றும் $\neg p$ **சமானமானவை.**

9. $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$ எனக் காட்டுக

p	q	$p \leftrightarrow q$	$\neg(p \leftrightarrow q)$	$\neg q$	$p \leftrightarrow \neg q$
T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	T	T
F	T	F	T	F	T
F	F	T	F	T	F

$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$

10. $p \to q$ மற்றும் $q \to p$ **சமானமற்றவை** எனக் காட்டுக

P	q	$p \to q$	$q \to p$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	T

$p \to q$ மற்றும் $q \to p$ **சமானமற்றவை**

11. $q \to p \equiv \neg p \to \neg q$ எனக் காட்டுக

P	q	$q \to p$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \to \neg q$
T	T	T	F	F	T
T	F	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

$q \to p \equiv \neg p \to \neg q$

12. $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ எனக் காட்டுக

P	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

13. $((p \vee q) \wedge \neg p) \to q$ என்ற கூட்டு கூற்று **மெய்மை அல்லது முரண்பாடு அல்லது நிச்சயமின்மை என்பதை சரிபார்.**

P	q	$p \vee q$	$\neg p$	$(p \vee q) \wedge \neg p$	$((p \vee q) \wedge \neg p) \to q$
T	T	T	F	F	T
T	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	F	T

$((p \vee q) \wedge \neg p) \to q$ **மெய்மையாகும்.**

14. $(\boldsymbol{p}\overline{\vee}\boldsymbol{q}) \wedge (\boldsymbol{p}\overline{\vee}\neg\boldsymbol{q})$ மெய் அட்டவணை அமைக்க

P	q	$p\overline{\vee}q$	$\neg q$	$p\overline{\vee}\neg q$	$(p\overline{\vee}q) \wedge (p\overline{\vee}\neg q)$
T	T	F	F	T	F
T	F	T	T	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	F	T	T	F

15. மெய் அட்டவணையை பயன்படுத்தாமல்

$\boldsymbol{p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r}$ என்பதை சரிபார்

தீர்வு: $p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv \neg p \vee (q \rightarrow r)$

$\equiv \neg p \vee (\neg q \vee r)$

$\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee r$

$\equiv \neg (p \wedge q) \vee r$

$\equiv (p \wedge q) \rightarrow r$

$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$

16. மெய் அட்டவணையை பயன்படுத்தாமல்

$\boldsymbol{p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg q \wedge \neg p)}$ என்பதை சரிபார்

தீர்வு:

$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

$\equiv (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$

$\equiv (\neg p \wedge (p \vee \neg q) \vee ([q \wedge (p \vee \neg q)])$

$\equiv [(\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q)] \vee [(q \wedge p) \vee (q \wedge \neg q)]$

$\equiv [F \vee (\neg p \wedge \neg q)] \vee [(q \wedge p) \vee F]$

$\equiv (q \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg q \wedge \neg p)$

17. மெய் அட்டவணையை பயன்படுத்தாமல்

$\boldsymbol{p \rightarrow (q \rightarrow p)}$ **ஆனது மெய்மை அல்லது முரண்பாடு** என்பதை சரிபார்.

தீர்வு:

$p \rightarrow (q \rightarrow p) \equiv \neg p \vee (q \rightarrow p)$

$\equiv \neg p \vee (\neg q \vee p)$

$\equiv \neg p \vee (p \vee \neg q)$

$\equiv (\neg p \vee p) \vee \neg q$

$\equiv T \vee \neg q$

$\equiv T \therefore$ $\boldsymbol{p \rightarrow (q \rightarrow p)}$ மெய்மை

வகையீடுகள் மற்றும் பகுதி வகையீடுகள்

முக்கிய குறிப்புகள்:

நேரியல் தோராய மதிப்பு:

$$\boldsymbol{L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

ஆய்லர் தேற்றம் : $\boldsymbol{x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf}$	
படி $= n =$ தொ. படி $-$ ப. படி	

1. $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{1+x}, x \geq -1}$ **என்ற சார்பிற்கு நேரியல் தோராய மதிப்பை $\boldsymbol{x_0 = 3}$ –இல் காண்க. இதைப் பயன்படுத்தி $\boldsymbol{f(3.2)}$ -ஐ மதிப்பிடுக.**

தீர்வு

$f(x) = \sqrt{1+x}$, $x_0 = 3, \Delta x = 0.2$

$f(3) = \sqrt{1+3} = 2.$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \Rightarrow f'(3) = \frac{1}{2\sqrt{1+3}} = \frac{1}{4}$$

$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$= 2 + \frac{1}{4}(x-3) = \frac{x}{4} + \frac{5}{4}$

$$f(3.2) = \sqrt{4.2} \cong L(3.2) = \frac{3.2}{4} + \frac{5}{4} = 2.050$$

2. $\boldsymbol{\sqrt{9.2}}$ **நேரியல் தோராய மதிப்பை காண்க.**

தீர்வு :

$f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 9, \Delta x = 0.2$

$f(9) = 3,$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{(2\times 3)} = \frac{1}{6}$

$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$\sqrt{9.2} = f(9) + f'(9)(x-9)$

$$= 3 + \frac{1}{6}(9.2-9) = 3 + \frac{0.2}{6} = 3.0333$$

3. $\boldsymbol{u = sin^{-1}\left(\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)}$ **எனில்,** $\boldsymbol{x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}tan\,u}$ எனக்காட்டுக.

தீர்வு $\quad u = \sin^{-1}\left(\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)$

$f = \sin u = \left(\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)$

படி $= n =$ தொ. படி $-$ ப. படி

$n = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\therefore f(x,y)$ஆனது சம்படித்தான சார்பு மேலும் படியானது

$$n = \frac{1}{2}$$

ஆய்லர் தேற்றம், $\quad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \mathrm{n}f$

$$x\frac{\partial}{\partial x}(\sin u) + y\frac{\partial}{\partial y}(\sin u) = \frac{1}{2}\sin u$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\tan u$$

4. $\boldsymbol{u(x,y) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x+y}}}$ எனில் $\boldsymbol{x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3}{2}u}$ எனக்காட்டுக.

தீர்வு

$$u(x,y) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x+y}}$$

படி $= n =$ தொ. படி $-$ ப. படி

$n = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$\therefore u(x,y)$ஆனது சம்படித்தான சார்பு மேலும் படியானது

$$n = \frac{3}{2}$$

By Euler theorem, $\quad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \mathrm{n}f$

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3}{2}u$$

5. $\boldsymbol{v(x,y) = \log\left(\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)}$ **எனில்,** $\boldsymbol{x\frac{\partial v}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial y} = 1}$ என சரிபார்

தீர்வு

$v(x,y) = \log\left(\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)$

$$f = e^v = \frac{x^2+y^2}{x+y}$$

படி $= n =$ தொ. படி $-$ ப. படி

$n = 2 - 1 = 1$

$\therefore f(x,y)$ஆனது சம்படித்தான சார்பு மேலும் படியானது

$n = 1$

ஆய்லர் தேற்றம், $\quad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \mathrm{n}f$

$$x\frac{\partial e^v}{\partial x} + y\frac{\partial e^v}{\partial y} = (1)e^v$$

$$x\frac{\partial v}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial y} = 1$$

6. w(x,y,z)= $\boldsymbol{\log\left(\frac{5x^3y^4+7y^2xz^4-75y^3z^4}{x^2+y^2}\right)}$ எனில், $\boldsymbol{x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} + z\frac{\partial w}{\partial z}}$ **ன் மதிப்பு காண்க**

தீர்வு

$$w(x,y,z)=\log\left(\frac{5x^3y^4+7y^2xz^4-75y^3z^4}{x^2+y^2}\right)$$

$$f=\ e^w=\left(\frac{5x^3y^4+7y^2xz^4-75y^3z^4}{x^2+y^2}\right)$$

$$\text{படி}=n=\text{தொ. படி}-\text{ப. படி}$$

$$n=7-2=5$$

$\therefore f(x,y,z)$ஆனது சம்படித்தான சார்பு மேலும் படியானது

$$n=5$$

ஆய்லர் தேற்றம், $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=nf$

$$x\frac{\partial e^w}{\partial x}+y\frac{\partial e^w}{\partial y}+z\frac{\partial e^w}{\partial z}=(5)e^w$$

$$x\frac{\partial w}{\partial x}+y\frac{\partial w}{\partial y}+z\frac{\partial w}{\partial z}=5$$

7. $g(x,y)=xlog\left(\frac{y}{x}\right)$ சமப்படித்தான சார்பு என காட்டுக மேலும் g க்கு ஆய்லர் தேற்றத்தை சரிபார்

தீர்வு

$$g(x,y)=xlog\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\text{படி}=n=\text{தொ. படி}-\text{ப. படி}$$

$$n=2-1=1$$

$\therefore f(x,y)$ஆனது சம்படித்தான சார்பு மேலும் படியானது

$$n=1$$

ஆய்லர் தேற்றம், $x\frac{\partial g}{\partial x}+y\frac{\partial g}{\partial y}=1g$

LHS$=x\frac{\partial g}{\partial x}+y\frac{\partial g}{\partial y}=x\frac{\partial}{\partial x}\left(x\log\frac{y}{x}\right)+y\frac{\partial}{\partial y}\left(x\log\frac{y}{x}\right)$

$$=x\log\frac{y}{x}=g$$

$$x\frac{\partial g}{\partial x}+y\frac{\partial g}{\partial y}=1g$$

சமன்பாட்டியல்

- ❖ $ax^3+bx^2+cx+d=0$
- ❖ கெழுக்களின் கூடுதல் = 0

  $\Rightarrow x=1$ ஓர் மூலமாகும்
- ❖ கெழுக்களின் கூடுதல் $a+c=b+d$

  $\Rightarrow x=-1$ ஓர் மூலமாகும்
- ❖ மற்றபடி $x=2$ (அ)3 ஐ செய்து பார்

1.தீர்க்க $x^4-10x^3+26x^2-10x+1=0$

தீர்வு:

$$x^4-10x^3+26x^2-10x+1=0$$

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-10\left(x+\frac{1}{x}\right)+26=0$$

$$y^2-2-10y+26=0$$

$$y^2-10y+24=0$$

$$(y-6)(y-4)=0$$

$$y=6,\ \ y=4$$

நிலை(i) $x+\frac{1}{x}=6$	நிலை(ii) $x+\frac{1}{x}=4$
$\frac{x^2+1}{x}=6$	$\frac{x^2+1}{x}=4$
$x^2+1=6x$	$x^2+1=4x$
$x^2-6x+1=0$	$x^2-4x+1=0$
$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$=3\pm2\sqrt{2}$	$=2\pm\sqrt{3}$

2. தீர்க்க $6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$

தீர்வு:

2	6	-35	62	-35	6	
	0	12	-46	32	-6	
3	6	-23	16	-3	0	
	0	18	-15	3		
	6	-5	10	0		

குறைக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$6x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$x = 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$$

3. $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் $\frac{1}{3}$ எனில் சமன்பாட்டை தீர்க்க. **M-23**

தீர்வு:

$\frac{1}{3}$	6	-5	-38	-5	6
	0	2	-1	-13	-6
3	6	-3	-39	-18	0
	0	18	45	18	
	6	15	6	0	

குறைக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$6x^2 + 15x + 6 = 0$$

$$\left(x + \frac{12}{6}\right)\left(x + \frac{3}{6}\right) = 0$$

$$(x + 2)\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$x = \frac{1}{3}, 3, -2, -\frac{1}{2}$$

4. தீர்க்க $x^4 + 3x^3 - 3x + 1 = 0$

தீர்வு:

1	1	3	0	-3	-1
	0	1	4	4	1
-1	1	4	4	1	0
	0	-1	-3	-1	
	1	3	1	0	

குறைக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, \quad x = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$$

$$x = 1, -1, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$$

5. $x^6 - 13x^5 + 62x^4 - 126x^3 + 65x^2 + 127x - 140 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $2 + i$ மற்றும் $3 - \sqrt{2}$ எனில் அனைத்து மூலங்களையும் காண்க.

தீர்வு: கொடுக்கப்பட்ட மூலங்கள் $2 + i$, $3 - \sqrt{2}$

மற்ற மூலங்கள் $2 - i$, $3 + \sqrt{2}$

விடுபட்ட மூலங்கள் a மற்றும் b என்க.

மூ.கூ: $2 + i + 3 - \sqrt{2} + 2 - i + 3 + \sqrt{2} + a + b = 13$

$$10 + a + b = 13$$

$$a + b = 3$$

மூ.பெ : $(2 + i)(2 - i)(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})\, ab = 135$

$$5(7)ab = -140$$

$$ab = \frac{-140}{35} = -4$$

குறைக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$(x - 4)(x + 1) = 0$$

$$x = 4, \quad x = -1$$

6. $x^6 - 3x^5 - 5x^4 + 22x^3 - 39x^2 - 39x + 135$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவையின் இரு பூஜ்ஜியமாக்கிகள் $1 + 2i$ மற்றும் $\sqrt{3}$ எனில் மற்ற பூஜ்ஜியமாக்கிகளை காண்க.

தீர்வு: கொடுக்கப்பட்ட மூலங்கள் $1 + 2i$, $\sqrt{3}$

மற்ற மூலங்கள் $1 - 2i$, $-\sqrt{3}$

விடுபட்ட மூலங்கள் a மற்றும் b என்க.

மூ.கூ $1 + 2i + \sqrt{3} + 1 - 2i + (-\sqrt{3}) + a + b = 3$

$$a + b = 1$$

மூ.பெ $(1 + 2i)(1 - 2i)(\sqrt{3})(-\sqrt{3})\, ab = 135$

$$5(-3)\, ab = 135$$

$$ab = \frac{135}{-15} = -9$$

குறைக்கப்பட்ட சமன்பாடு $x^2 - x - 9 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4\times 1\times -9}}{2\times 1} = \frac{1 \pm \sqrt{37}}{2}$$

7. $3x^3 - 16x^2 + 23x - 6 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் இரு மூலங்களின் பெருக்கல் 1 எனில் சமன்பாட்டை தீர்க்க.

தீர்வு:

$x^3 - \frac{16}{3}x^2 + \frac{23}{3}x - \frac{6}{3} = 0$ ன் மூலங்கள் a,b,c என்க

$$abc = 2$$

$$c = 2$$

2	3	-16	23	-6
	0	6	-20	6
	3	-10	3	0

குறைக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$3x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$\left(x - \frac{9}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0 \qquad x = 2, 3, \frac{1}{3}$$

8. $x^3-9x^2+14x+24=0$ என்ற சமன்பாட்டின் இரு மூலங்கள் 3:2 என்ற விகிதத்தில் அமைந்தால், சமன்பாட்டை தீர்க்க.

தீர்வு:

-1	1	-9	14	24
	0	-1	10	-24
	1	-10	24	0

குறைக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$x^2-10x+24=0$$

$$(x-6)(x-4)=0$$

$$x=-1,4,6$$

செய்து பார்க்க:

தீர்க்க $2x^3+11x^2-9x-18=0$ J-23

9.தீர்க்க $2x^3-9x^2+10x=3$ M-22

தீர்வு:

$$2x^3-9x^2+10x-3=0$$

1	2	-9	10	-3
	0	2	-7	3
	2	-7	3	0

குறைக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$2x^2-7x+3=0$$

$$\left(x-\frac{6}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$x=1,3,\frac{1}{2}$$

10. $2x^3-x^2-18x+9=0$ எனும் முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டின் மூலங்களில் இரண்டின் கூடுதல் பூச்சியமெனில் சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

தீர்வு:

$x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{18}{2}x+\frac{9}{2}=0$ **ன் மூலங்கள் a,b,c என்க**

$\frac{1}{2}$	2	-1	-18	9
	0	1	0	-9
	2	0	-18	0

$$a+b=0$$

$a+b+c=\frac{1}{2}$ $c=\frac{1}{2}$

குறைக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$2x^2-18=0$$

$$x=3,\ x=-3$$

$$x=\frac{1}{2},3,-3$$

11. $9x^3-36x^2+44x-16=0$ மூலங்கள் கூட்டுத் தொடரில் அமைந்தவை எனில், சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

தீர்வு: $a-b,a,a+b$ மூலங்கள் என்க

$$x^3-\frac{36}{9}x^2+\frac{44}{9}x-\frac{19}{9}=0$$

$$a-b+a+a+b=4$$

$$a=\frac{4}{3}$$

$\frac{4}{3}$	9	-36	44	-16
	0	12	-32	16
	9	-24	12	0

குறைக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$9x^2-24x+12=0$$

$$\left(x-\frac{18}{9}\right)\left(x-\frac{6}{9}\right)=0$$

$$x=2,\frac{2}{3},\frac{4}{3}$$

12. $3x^3-26x^2+52x-24=0$ மூலங்கள் பெருக்குத் தொடரில் அமைந்தவை எனில், சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

தீர்வு:

$x^3-\frac{26}{3}x^2+\frac{52}{3}x-\frac{24}{3}=0$ **ன் மூலங்கள் $ar,a,\frac{a}{r}$ என்க**

$$a^3=8 \quad\Rightarrow\quad a=2$$

2	3	-26	52	-24
	0	6	-40	24
	3	-20	12	0

குறைக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$3x^2-20x+12=0\ \left(x-\frac{18}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)=0$$

$$x=2,6,\frac{2}{3}$$

13.$2x^3-6x^2+3x+k=0$ எனும் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் மற்ற இரு மூலங்களின் கூடுதலின் இரு மடங்கு எனில், k -ன் மதிப்பைக் காண்க. மேலும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

தீர்வு:

$x^3-\frac{6}{2}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{k}{2}=0$ **ன் மூலங்கள் a,b,c என்க**

Given $a=2(b+c)$

$$a+b+c=3$$

$$2a+2b+2c=6$$

$$3a=6$$

$$a=2$$

2	2	-6	3	k
	0	4	-4	-2
	2	-2	-1	k-2

$$k-2=0$$

$$k=2$$

குறைக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$2x^2-2x-1=0$$

கணிதம்

$x = \frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$ $x = 2, \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

14. தீர்க்க $(x-2)(x-7)(x-3)(x+2)+19=0$

தீர்வு: $(x-2)(x-3)(x-7)(x+2)+19=0$

$(x^2-5x+6)(x^2-5x-14)+19=0$

$x^2-5x=y$ என்க $(y+6)(y-14)+19=0$

$y^2-8y-84+19=0$

$y^2-8y-65=0$

$y=13,\quad y=-5$

நிலை (i) $y=13$	நிலை (ii) $y=-5$
$x^2-5x=13$	$x^2-5x=-5$
$x^2-5x-13=0$	$x^2-5x+5=0$
$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{5\pm\sqrt{77}}{2}$	$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$

15. தீர்க்க $(2x-3)(6x-1)(3x-2)(x-2)-7=0$

தீர்வு: $(2x-3)(3x-2)(6x-1)(x-2)-7=0$

$(6x^2-13x+6)(6x^2-13x+2)-7=0$

$6x^2-13x=y$ என்க $(y+6)(y+12)-7=0$

$y^2+18y+65=0$

$y=-13,\quad y=-5$

நிலை(i) $y=-13$	நிலை(ii) $y=-5$
$6x^2-13x=-13$	$6x^2-13x=-5$
$6x^2-13x+13=0$	$6x^2-13x+5=0$
$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$x=\frac{10}{6},\frac{3}{6}$
$=\frac{13\pm\sqrt{143i}}{12}$	$=\frac{5}{3},\frac{1}{2}$

16. தீர்க்க $(2x-1)(x+3)(x-2)(2x+3)+20=0$

தீர்வு: $(2x-1)(2x+3)(x+3)(x-2)+20=0$

$(4x^2+4x-3)(x^2+x-6)+20=0$

$x^2+x=y$ என்க $(4y-3)(y-6)+20=0$

$4y^2-27y+18+20=0$

$4y^2-27y+38=0$

$y=\frac{19}{4},\quad y=\frac{8}{4}=2$

நிலை(i) $y=\frac{19}{4}$	நிலை(ii) $y=2$
$x^2+x=\frac{19}{4}$	$x^2+x=2$
$4x^2+4x-19=0$	$x^2+x-2=0$
$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$x=-2,\quad x=1$
$=\frac{-1\pm2\sqrt{5}}{2}$	

17. பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டை அமைக்க

(i) $2+i\sqrt{3}$ (ii) $2i+3$ (iii) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$

(iv) $\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$ (v) $2-\sqrt{3}$ M-22

தீர்வு:

(i) $x=2+i\sqrt{3}$	(ii) $x=2i+3$
$x-2=i\sqrt{3}$	$x-3=2i$
$(x-2)^2=(i\sqrt{3})^2$	$(x-3)^2=(2i)^2$
$x^2-4x+4=-3$	$x^2-6x+9=-4$
$x^2-4x+7=0$	$x^2-6x+13=0.$

கணிதம்

(iii) $x=\sqrt{5}-\sqrt{3}$ $x^2=\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2$ $x^2=5+3-2\sqrt{15}$ $x^2-8=-2\sqrt{15}$ $\left(x^2-8\right)^2=\left(-2\sqrt{15}\right)^2$ $x^4-16x^2+64=60.$ $x^4-16x^2+4=0$	(iv) $x=\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$ $x^2=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ $(x^2)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$ $x^4=\frac{2}{3}$ $3x^4=2$ Or $3x^4-2=0$

18. மூலங்களின் தன்மையை ஆராய்க

(i) $9x^9+2x^5-x^4-7x^2+2=0$

சார்பு	குறிகள்	மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை	மெய் மூலங்களின் எண்ணிக்கை
$f(x)$	+ + - - +	2	2 +Ve
$f(-x)$	- - - - +	1	1 -Ve

கற்பனை மூலங்களின் எண்ணிக்கை = 9 - 3 = 6

(ii) $x^9+9x^7+7x^5+5x^3+3x=0$ J-23

$x\left(x^8+9x^6+7x^4+5x^2+3\right)=0$

$x=0$ என்பது ஓர் மூலமாகும்

சார்பு	குறிகள்	மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை	மெய் மூலங்களின் எண்ணிக்கை
$f(x)$	+ + + + +	0	0 +Ve
$f(-x)$	- - - - -	0	0 -Ve

கற்பனை மூலங்களின் எண்ணிக்கை = 9-1 = 8

(iii) $x^9-5x^8-14x^7=0 \Rightarrow x^7\left(x^2-5x-14\right)=0$

$x=0$ என்ற மூலத்தின் எண்ணிக்கை 7

சார்பு	குறிகள்	மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை	மெய் மூலங்களின் எண்ணிக்கை
$f(x)$	+ - -	1	1 +Ve
$f(-x)$	- - +	1	1 -Ve

கற்பனை மூலங்களின் எண்ணிக்கை = 9 - 9 = 0

19. கன சதுரப் பெட்டியின் பக்கங்களை 1, 2, 3 அலகுகள் அதிகரிக்கும் போது கன சதுரபெட்டியின் கொள்ளளவை விட 52 க.அ அதிகமுள்ள கனச் செவ்வகம் கிடைக்கிறது எனில், கன செவ்வகத்தின் கொள்ளளவு காண்க. S-21

தீர்வு: $(x+1)(x+2)(x+3)-x^3=52$

$$x^3+6x^2+11x+6-x^3=52$$

$$6x^2+11x+6=52$$

$$6x^2+11x-46=0$$

$$x=\frac{12}{6},x=\frac{-23}{6}$$

$x=2,\quad x=\frac{-23}{6}$ (சாத்தியமற்றது)

∴ கன செவ்வகத்தின் கொள்ளளவு

$$(x+1)(x+2)(x+3)=3\times4\times5=60$$

20. முப்படி சமன்பாட்டை அமைக்க

(i) 1, 2 மற்றும் 3

$(x-1)(x-2)(x-3)=0$

$x^3-6x^2+11x-6=0$

(ii) 1,1 மற்றும் -2

$(x-1)(x-1)(x+2)=0$

$x^3-0x^2-3x+2=0$

(iii) 2 ,$\frac{1}{2}$ மற்றும் 1.

$(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)=0$

$x^3-\frac{7}{2}x^2+\frac{7}{2}x-1=0$

$2x^3-7x^2+7x-2=0$

21. $x^3+2x^2+3x+4=0$, என்ற முப்படி சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α , β மற்றும் γ எனில்

(i) 2α , 2β , 2γ (ii) $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$ (iii) $-\alpha,-\beta,-\gamma$

(iv) $\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2},\frac{\gamma}{2}$ மூலமாக கொண்ட சமன்பாட்டை அமைக்க

தீர்வு:

(i) 2α , 2β , 2γ

$2^0x^3 + 2^1 2x^2 + 2^2 3x + 2^3 4 = 0$

$x^3 + 4x^2 + 12x + 32 = 0$

(ii) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$

$4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$

(iii) $-\alpha, -\beta, -\gamma$

$-x^3 + 2x^2 - 3x + 4 = 0$

$x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$

(iv) $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^0 x^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 2x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 3x + \left(\frac{1}{2}\right)^3 4 = 0$

$x^3 + x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{4}{8} = 0$

$8x^3 + 8x^2 + 6x + 4 = 0$

22. $2x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 8 = 0$, என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α, β, γ மற்றும் δ எனில், $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ மற்றும் $\alpha\beta\gamma\delta$ ஐ மூலங்களாக கொண்ட இரு படி சமன்பாட்டை காண்க.

தீர்வு: $2x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 8 = 0$

$x^4 + \frac{5}{2}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 0x + \frac{8}{2} = 0$

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \frac{-5}{2}$ $\quad$ $\alpha\beta\gamma\delta = \frac{8}{2}$

தேவையான சமன்பாடு $x^2 - (S.R)x + (P.R) = 0$

$x^2 - (\frac{-5}{2} + \frac{8}{2})x + (\frac{-5}{2} \times \frac{8}{2}) = 0$

$x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{40}{4} = 0$

$2x^2 - 3x - 20 = 0$

23. $lx^2 + nx + n = 0$, என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் p மற்றும் q எனில் $\sqrt{\frac{p}{q}} + \sqrt{\frac{q}{p}} + \sqrt{\frac{n}{l}} = 0$ எனக்காட்டுக.

தீர்வு: $lx^2 + nx + n = 0$ **M-23**

$p + q = -\frac{n}{l}$ $\quad$ $pq = \frac{n}{l} \Longrightarrow \sqrt{pq} = \sqrt{\frac{n}{l}}$

$\sqrt{\frac{p}{q}} + \sqrt{\frac{q}{p}} + \sqrt{\frac{n}{l}} = \frac{p+q}{\sqrt{pq}} + \sqrt{\frac{n}{l}} = -\sqrt{\frac{n}{l}} + \sqrt{\frac{n}{l}} = 0$

24. $x^2 + px + q = 0$ மற்றும் $x^2 + p'x + q' = 0$ ஆகிய இரு சமன்பாடுகளுக்கும் ஒரு பொதுவான மூலம் இருப்பின் அம் மூலம் $\frac{pq'-qp'}{q-q'}$ அல்லது $\frac{q-q'}{p-p'}$ எனக்காட்டுக.

தீர்வு: 'a' பொதுவான மூலம் என்க

$a^2 + pa + q = 0$ $\quad$ $\frac{a^2}{\begin{vmatrix} p & q \\ p' & q' \end{vmatrix}} = \frac{a}{\begin{vmatrix} q & 1 \\ q' & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & p \\ 1 & p' \end{vmatrix}}$

$a^2 + p'a + q' = 0$ $\quad$ $\frac{a^2}{pq'-qp'} = \frac{a}{q-q'} = \frac{1}{p'-p}$

$\frac{a^2}{pq'-qp'} = \frac{a}{q-q'}$ $\quad$ $\frac{a}{q-q'} = \frac{1}{p'-p}$

$a = \frac{pq'-qp'}{q-q'}$ (or) $\quad$ $a = \frac{q-q'}{p-p'}$

25. $x^2 - 5x + 6 = 0$, ன் மூலங்கள் α, β எனில், $\alpha^2 - \beta^2$ ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு: $\alpha + \beta = 5, \quad \alpha\beta = 6$ **S-21**

$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 5^2 - 4(6) = 1$

$\alpha - \beta = \pm 1$

$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = 5(\pm 1) = \pm 5$

26. $x^2 + 5x + 6 = 0$, ன் மூலங்கள் α, β எனில், $\alpha^2 + \beta^2$ ன் மதிப்பு காண்க.

Soln: $\alpha + \beta = -5, \quad \alpha\beta = 6$ **J-22**

$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-5)^2 - 2(6) = 13$

27. தீர்க்க

(i) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

(ii) $x^4 - 14x^2 + 45 = 0$

(i) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ J-22		(ii) $x^4 - 14x^2 + 45 = 0$	
$x^2 = -1$	$x^2 = 4$	$x^2 = 9$	$x^2 = 5$
$x = \pm\sqrt{-1}$	$x = \pm 2$	$x = \pm 3$	$x = \pm\sqrt{5}$
$= \pm i$			

Soln:

28. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ ன் மூலங்கள் கூட்டுத்தொடர் முறையில் இருப்பதற்கான நிபந்தனையை காண்க. **S-20**

தீர்வு: மூலங்கள் $a - d, a, a + d$ என்க

மூலங்களின் கூடுதல் $a - d + a + a + d = -p$

$3a = -p$

$a = \frac{-p}{3}$

$\left(\frac{-p}{3}\right)^3+p\left(\frac{-p}{3}\right)^2+q\left(\frac{-p}{3}\right)+r=0$

$-p^3+3p^3-9pq+r=0$

$2p^3+r=9pq$

29. α, β, மற்றும் γ என்பவை $x^3+px^2+qx+r=0$ ன் மூலங்கள் எனில் $\sum\frac{1}{\beta\gamma}$ ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு:

$\alpha+\beta+\gamma=-p; \quad \alpha\beta\gamma=-r$

$\sum\frac{1}{\beta\gamma}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-p}{-r}=\frac{p}{r}$

30. α மற்றும் β என்பவை $2x^2-7x+13=0$ ன் மூலங்கள் எனில் α^2 மற்றும் β^2ஐ மூலமாகக் கொண்ட சமன்பட்டை காண்க . M-24

தீர்வு: $x^2=y$ என்க $\quad 2y-7\sqrt{y}+13=0$

$2y+13=7\sqrt{y}$

$(2y+13)^2=\left(7\sqrt{y}\right)^2$

$4y^2+52y+169=49y$

$4y^2+3y+169=0$

31. α மற்றும் β என்பவை $17x^2+43x-73=0$ ன் மூலங்கள் எனில் α+2 மற்றும் β+2 ஐ மூலமாகக் கொண்ட சமன்பட்டை காண்க

தீர்வு:

மூலங்கள் 2 கூடினால் சமன்பாட்டை -2 ஆல் வகுக்க

தேவையான சமன்பாடு $17x^2-25x-91=0$

32. $2x^4-8x^3+6x^2-3=0$ -ன் மூலங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் காண்க.

தீர்வு: α,β,γ மற்றும் δ மூலங்கள் என்க

$x^4-\frac{8}{2}x^3+\frac{6}{2}x^2-\frac{3}{2}=0$

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=4$

$\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=3$

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$

$=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2-2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta)$

$=(4)^2-2(3)=10$

கணிதம்

நிகழ்தகவு பரவல்

1. ஓர் ஆறு பக்க பகடையின் ஒரு பக்கத்தில் '1' என குறிக்கப்படுகிறது. அதன் இரு பக்கங்களில் '2' எனவும் மீதமுள்ள மூன்று பக்கங்களில் '3' எனவும் குறிக்கப்படுகிறது. இரு முறை பகடை உருட்டப்படுகிறது. இருமுறை எளிதலின் மொத்தத் தொகையை X குறிக்கிறது எனில், (i)நிகழ்தகவு நிறை சார்பு காண்க. (ii)குவிவு பரவல் சார்பு காண்க. (iii) $P(3\le X<6)$ காண்க. (iv) $P(X\ge 4)$ காண்க

தீர்வு: சமவாய்ப்பு மாறி X ன் மதிப்புகள் 2,3,4,5 மற்றும் 6.

X	2	3	4	5	6
PMF	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{9}{36}$
CDF	$\frac{1}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{27}{36}$	$\frac{36}{36}$

+	1	2	2	3	3	3
1	2	3	3	4	4	4
2	3	4	4	5	5	5
2	3	4	4	5	5	5
3	4	5	5	6	6	6
3	4	5	5	6	6	6
3	4	5	5	6	6	6

(iii) $P(3\le X<6)=P(x=3)+P(x=4)+P(x=5)$

$=\frac{4}{36}+\frac{10}{36}+\frac{12}{36}=\frac{26}{36}$

(iv) $P(X \geq 4) = P(x=4) + P(x=5) + P(x=6)$

$= \frac{10}{36} + \frac{12}{36} + \frac{9}{36} = \frac{31}{36}$

2. **ஓர் அறுபக்க பகடையின் ஒரு பக்கத்தில் '1' எனவும், இருபக்கங்களில் '3' மூன்று எனவும், மற்றும் ஏனைய மூன்று பக்கங்களில் '5' எனவும் குறிக்கப்பட்டுள்ளது. பகடை இருமுறை வீசப்படுகிறது. இருமுறை வீசப்பட்டதின் மொத்த எண்ணிக்கையை X குறிக்கிறது.(i)நிகழ்தகவு நிறை சார்பு (ii)குவிவு பரவல் சார்பு (iii) $P(4 \leq X \leq 10)$ (iv)$P(X \geq 6)$**

தீர்வு: சமவாய்ப்பு மாறி X ன் மதிப்புகள் 2,4,6,8 மற்றும் 10.

+	1	3	3	5	5	5
1	2	4	4	6	6	6
3	4	6	6	8	8	8
3	4	6	6	8	8	8
5	6	8	8	10	10	10
5	6	8	8	10	10	10
5	6	8	8	10	10	10

X	2	4	6	8	10
PMF	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{9}{36}$
CDF	$\frac{1}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{27}{36}$	$\frac{36}{36}$

(iii) $P(4 \leq X < 10)$

$= P(x=4) + P(x=6) + P(x=8)$

$= \frac{4}{36} + \frac{10}{36} + \frac{12}{36} = \frac{26}{36}$

(iv) $P(X \geq 6) = P(x=6) + P(x=8) + P(x=10)$

$= \frac{10}{36} + \frac{12}{36} + \frac{9}{36} = \frac{31}{36}$

3. **ஒரு தனிநிலை சார்பு X -ன் நிகழ்தகவு நிறை சார்பானது**

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	k	$2k$	$6k$	$5k$	$6k$	$10k$

எனில் (i) $P(2 < X < 6)$ (ii) $P(2 \leq X < 5)$ (iii) $P(X \leq 4)$ (iv) $P(3 < X)$ என்பவற்றைக் காண்க.

தீர்வு: f நிகழ்தகவு நிறை சார்பு

$\therefore \sum f(x) = 1$

$k + 2k + 6k + 5k + 6k + 10k = 1$

$30k = 1 \implies k = \frac{1}{30}$

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{5}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{10}{30}$

(i) $P(2 < X < 6) = P(x=3) + P(x=4) + P(x=5) = \frac{6}{30} + \frac{5}{30} + \frac{6}{30} = \frac{17}{30}$

(ii) $P(2 \leq X < 5) = P(x=2) + P(x=3) + P(x=4) = \frac{2}{30} + \frac{6}{30} + \frac{5}{30} = \frac{13}{30}$

(iii) $P(X \leq 4) = P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) + P(x=4) = \frac{1}{30} + \frac{2}{30} + \frac{6}{30} + \frac{5}{30} = \frac{14}{30}$

(iv) $P(3 < X) = P(x=4) + P(x=5) + P(x=6) = \frac{5}{30} + \frac{6}{30} + \frac{10}{30} = \frac{21}{30}$

4. **ஒரு தனிநிலை சார்பு X -ன் நிகழ்தகவு நிறை சார்பானது**

x	1	2	3		4	5
$f(x)$	k^2	$2k^2$	$3k^2$		$2k$	$3k$

எனில் (i) $P(2 \leq X < 5)$ (ii) $P(3 < X)$ காண்க.

தீர்வு: f நிகழ்தகவு நிறை சார்பு $\therefore \sum f(x) = 1$

$$k^2 + 2k^2 + 3k^2 + 2k + 3k = 1$$

$$6k^2 + 5k - 1 = 0$$

$$k = -1 \;,\; k = \frac{1}{6}$$

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{6} = \frac{12}{36}$	$\frac{3}{6} = \frac{18}{36}$

(i) $P(2 \le X < 5) = P(x = 2) + P(x = 3) + P(x = 4) = \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{12}{36} = \frac{17}{36}$

(ii) $P(3 < X) = P(x = 4) + P(x = 5) = \frac{12}{36} + \frac{18}{36} = \frac{30}{36}$

5. ஒரு தனிநிலை சார்பு X -ன் குவிவு பரவல் சார்பானது $F(x) = \begin{cases} \mathbf{0} \text{ for } -\infty < x < 0 \\ \frac{1}{2} \text{ for } 0 \le x < 1 \\ \frac{3}{5} \text{ for } 1 \le x < 2 \\ \frac{4}{5} \text{ for } 2 \le x < 3 \\ \frac{9}{10} \text{ for } 3 \le x < 4 \\ \mathbf{1} \text{ for } 4 \le x < \infty \end{cases}$

எனில் (i) நிகழ்தகவு நிறை சார்பு (ii) $P(X < 3)$ (iii) $P(X \ge 2)$ காண்க.

தீர்வு:

i) **சமவாய்ப்பு மாறி X -ன் மதிப்புகள்** 0,1,2,3,4.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

$ii) P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$$= \frac{5}{10} + \frac{1}{10} + \frac{2}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

iii) $P(X \ge 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{2}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

6.ஒரு தனிநிலை சார்பு X -ன் குவிவு பரவல் சார்பானது $F(x) = \begin{cases} 0 & ; -\infty < x < -1 \\ 0.15 & ; -1 \le x < 0 \\ 0.35 & ; 0 \le x < 1 \\ 0.60 & ; 1 \le x < 2 \\ 0.85 & ; 2 \le x < 3 \\ 1 & ; 3 \le x < \infty \end{cases}$

எனில் (i) நிகழ்தகவு நிறை சார்பு (ii)$p(X < 1)$ and(iii) $P(X \ge 2)$ காண்க

தீர்வு:

சமவாய்ப்பு மாறி X -ன் மதிப்புகள் $-1,0,1,2,3$

நிகழ்தகவு நிறை சார்பு $f(x)$:

x	-1	0	1	2	3
$F(x)$	0.15	0.35	0.60	0.85	1
$f(x)$	0.15	0.20	0.25	0.25	0.15

(i)

$ii) P(X < 1) = P(X = -1) + P(X = 0) = 0.15 + 0.20 = 0.35$

iii) $P(X \ge 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = 0.25 + 0.15 = 0.40$

கணிதம்

கணிதம்

5 Marks

முக்கிய குறிப்புகள்:

$tan^{-1}x + tan^{-1}y = tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$, $tan^{-1}x - tan^{-1}y = tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$

$cos^{-1}x + cos^{-1}y = cos^{-1}(xy - \sqrt{(1-x^2)}\ \sqrt{1-y^2}\ )$

1) d-ஐ பொது வித்தியாசமாகக் கொண்டு $a_1, a_2, \dots, a_n$ ஒரு கூட்டுத் தொடர் எனில்,

$$\tan\left[tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_1a_2}\right) + tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_2a_3}\right) + \cdots + tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_na_{n-1}}\right)\right] = \frac{a_n-a_1}{1+a_1a_n}$$ என நிறுவுக

தீர்வு:

$$tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_1a_2}\right) = tan^{-1}\left(\frac{a_2-a_1}{1+a_1a_2}\right) = tan^{-1}a_2 - tan^{-1}a_1$$

$$tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_2a_3}\right) = tan^{-1}\left(\frac{a_3-a_2}{1+a_2a_3}\right) = tan^{-1}a_3 - tan^{-1}a_2$$

$$tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_na_{n-1}}\right) = tan^{-1}\left(\frac{a_n-a_{n-1}}{1+a_{n-1}a_n}\right) = tan^{-1}a_n - tan^{-1}a_{n-1}$$

$$tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_1a_2}\right) + tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_2a_3}\right) + \cdots + tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_na_{n-1}}\right) = tan^{-1}a_n - tan^{-1}a_1$$

$$tan\ \left[tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_1a_2}\right) + tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_2a_3}\right) + \cdots + tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_na_{n-1}}\right)\right]$$

$$= tan[\ tan^{-1}a_n - tan^{-1}a_1]$$

$$= \tan\left[tan^{-1}\left(\frac{a_n-a_1}{1+a_1a_n}\right)\right]$$

$$= \frac{a_n-a_1}{1+a_1a_n}$$

2) $tan^{-1}x + tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)$ எனக்காட்டுக. இங்கு, $|x| < 1/\sqrt{3}$

தீர்வு: $$tan^{-1}x + tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = tan^{-1}\left(\frac{x+\frac{2x}{1-x^2}}{1-x\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)}\right)$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{x-x^3+2x}{1-x^2-2x^2}\right)$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)$$

3) $tan^{-1}x + tan^{-1}y + tan^{-1}z = tan^{-1}\left(\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}\right)$ எனக்காட்டுக.

தீர்வு: $$tan^{-1}x + tan^{-1}y + tan^{-1}z = tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + tan^{-1}(z)$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)+z}{1-\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)z}\right)$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{[x+y+z(1-xy)]/(1-xy)}{[1-xy-(xz+yz)]/(1-xy)}\right)$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}\right)$$

4) $tan^{-1}x + tan^{-1}y + tan^{-1}z = \pi$ எனில் $x + y + z = xyz$ எனக்காட்டுக.

தீர்வு: $tan^{-1}x + tan^{-1}y + tan^{-1}z = tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + tan^{-1}(z)$

$$= tan^{-1}\left(\frac{\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)+z}{1-\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)z}\right)$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{[x+y+z(1-xy)]/(1-xy)}{[1-xy-(xz+yz)]/(1-xy)}\right)$$

$$tan^{-1}x + tan^{-1}y + tan^{-1}z = tan^{-1}\left(\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}\right) = \pi$$

$$\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx} = tan\pi = 0$$

$$x+y+z-xyz = 0$$

$$x+y+z = xyz$$

5) $tan^{-1}(x-1) + tan^{-1}(x) + tan^{-1}(x+1) = tan^{-1}(3x)$ **என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளின் எண்ணிக்கை காண்க**

தீர்வு: $tan^{-1}(x-1) + tan^{-1}(x+1) = tan^{-1}(3x) - tan^{-1}(x)$

$$tan^{-1}\left(\frac{(x-1)+(x+1)}{1-(x-1)(x+1)}\right) = tan^{-1}\left(\frac{3x-x}{1+3x(x)}\right)$$

$$\frac{2x}{1-(x^2-1)} = \frac{2x}{1+3x^2}$$

$$2x(1+3x^2) = 2x(x^2+2)$$

$$2x+6x^3 = 2x^3+4x$$

$4x^3 - 2x = 0$ $\quad\therefore$ சமன்பாட்டின் தீர்வுகளின் எண்ணிக்கை 3

6) தீர்க்க $\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

தீர்வு: $\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \frac{\pi}{4}$

$$\tan^{-1}\left(\frac{\frac{x-1}{x-2}+\frac{x+1}{x+2}}{1-\left(\frac{x-1}{x-2}\right)\left(\frac{x+1}{x+2}\right)}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{(x-1)(x+2)+(x+1)(x-2)}{(x-2)(x+2)-(x-1)(x+1)} = \tan\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{x^2-x+2x-2+x^2+x-2x-2}{x^2-4-(x^2-1)} = 1$$

$$\frac{2x^2-4}{x^2-4-x^2+1} = 1$$

$$\frac{2x^2-4}{-3} = 1 \Rightarrow 2x^2 = -3+4$$

$$2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}$$

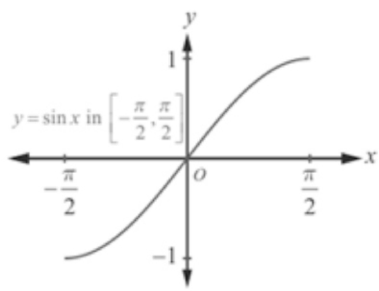
$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

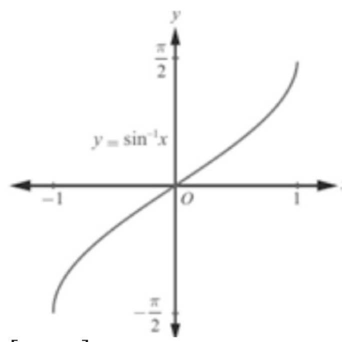
6) $cos^{-1}x + cos^{-1}y + cos^{-1}z = \pi$ மற்றும் $0 < x, y, z < 1$, எனில் $x^2+y^2+z^2+2xyz = 1$ எனக்காட்டுக.

தீர்வு:

$$cos^{-1}\ x = \alpha \quad cos^{-1} y = \beta$$
$$x = cos\alpha \quad y = cos\,\beta$$
$$cos^{-1} x + cos^{-1} y + cos^{-1} z = \pi$$
$$cos^{-1} x + cos^{-1} y = \pi - cos^{-1} z$$
$$cos^{-1}(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) = cos^{-1}(-z)$$
$$-z = xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$$

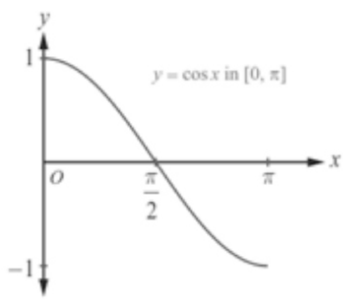
7) **சார்பகம் $[0.\pi]$ ல் $sinx$ மற்றும் சார்பகம் $[-1, 1]$ ல் $sin^{-1}x$ வளைவரை வரைக**

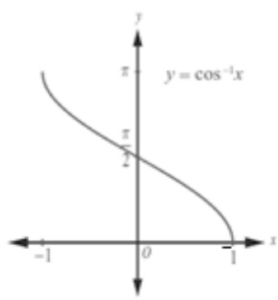




சார்பகம் :$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ **சார்பகம்:** $[-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

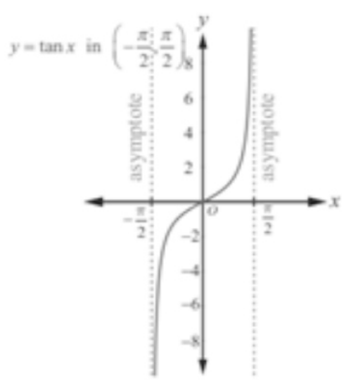
8) **சார்பகம் $[0.\pi]$ ல் $cosx$ மற்றும் சார்பகம் $[-1, 1]$ ல் $cos^{-1}x$ வளைவரை வரைக**

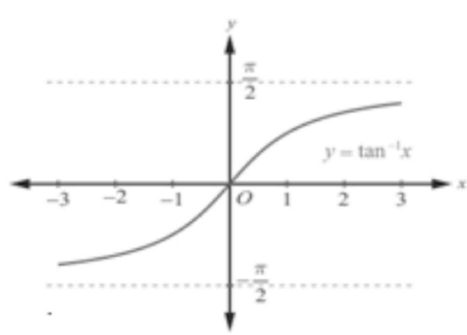




சார்பகம்:$[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ **சார்பகம் :**$[-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$

9) **சார்பகம் $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ ல் $tan\ x$ மற்றும் சார்பகம் R ல் $tan^{-1}x$ வளைவரை வரைக**





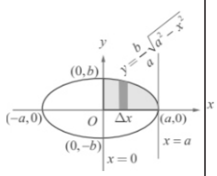
சார்பகம்: $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow R$ **சார்பகம்:** $R \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

9.INTEGRAL CALCULUS

1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ என்ற நீள்வட்டத்தினால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க. **J-22, M-24**

தீர்வு: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

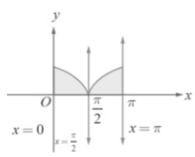


$$\text{Area } A = 4\int_0^a y\,dx$$
$$= 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$
$$= \frac{4b}{a}\left[\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^a$$
$$= \frac{4b}{a}\times\frac{\pi a^2}{4}$$
$$= \pi ab$$

2. $y=|\cos x|$ என்ற வளைவரை x -அச்சு, கோடுகள் $x=0$ மற்றும் $x=\pi$ ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு: $y=\begin{cases}\cos x\ ;\ 0\le x\le\frac{\pi}{2}\\ -\cos x\ ;\ \frac{\pi}{2}\le x\le\pi\end{cases}$ **M-20**

$$A=\int_0^{\pi} y\,dx$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$$
$$=2(\sin x)_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=2(1+0)$$
$$=2$$

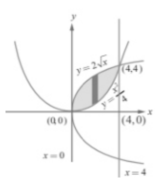


3. $y^2=4x$ மற்றும் $x^2=4y$ என்ற பரவளையங்களால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு: வெட்டும் புள்ளிகள் $(0,0)$ மற்றும் $(4,4)$

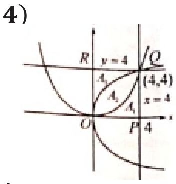
$y=2\sqrt{x}$ மற்றும் $y=\frac{x^2}{4}$

$$A=\int_0^4(y_1-y_2)dx$$
$$=\int_0^4\left(2\sqrt{x}-\frac{x^2}{4}\right)dx$$
$$=\left[2\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)-\frac{x^3}{3\times4}\right]_0^4$$
$$=\frac{4\times8}{3}-\frac{64}{12}$$
$$=\frac{16}{3}$$



4. ஒரு குடும்பத் தலைவர், $x=0, x=4, y=4$ & $y=0$ ஆகியவற்றால் அடைபடும் சதுர நிலத்தின் பரப்பை $y^2=4x$ மற்றும் $x^2=4y$ என்ற வளைவரைகளின் வாயிலாக தன்னுடைய மனைவி, மகள் மற்றும் மகன் ஆகியோர்களுக்கு மூன்று சமபாகங்களாகப் பிரிக்க விரும்புகிறார். அவ்வாறு பிரிக்க இயலுமா? பிரிக்க இயலும் எனில் ஒவ்வொருவருக்கும் கிடைக்கும் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு: Point of intersection $(0,0),(4,4)$

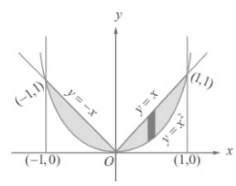


$$A_1=\int_0^4 y\,dx=\int_0^4\frac{x^2}{4}dx$$
$$=\left(\frac{x^3}{12}\right)_0^4=\frac{16}{3}$$
$$A_2=\int_0^4(y_1-y_2)dx$$
$$=\int_0^4\left(2\sqrt{x}-\frac{x^2}{4}\right)dx=\left[2\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)-\frac{x^3}{12}\right]_0^4$$
$$=\frac{32}{3}-\frac{16}{3}=\frac{16}{3}$$
$$A_3=\int_0^4 x\,dy=\int_0^4\frac{y^2}{4}dx=\left(\frac{y^3}{12}\right)_0^4=\frac{16}{3}$$

5. பரவளையம் $x^2=y$ மற்றும் வளைவரை $y=|x|$ ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு: வெட்டும் புள்ளிகள் $(0,0)$, $(1,1),(-1,1)$

$$A=2\int_0^1(y_1-y_2)dx$$
$$=2\int_0^1(x-x^2)dx$$

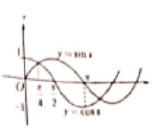


$$=2\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$
$$=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$$
$$=\frac{1}{3}$$

6. வளைவரைகள் $y=\sin x, y=\cos x$ மற்றும் கோடுகள் $x=0$ மற்றும் $x=\pi$ ஆகியவற்றுக்கு இடையே அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.

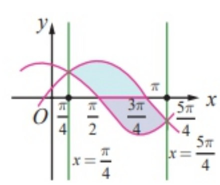
தீர்வு:

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(y_1-y_2)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(y_1-y_2)dx$$



$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(\cos x-\sin x)dx$$
$$=[\sin x+\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}}-[\sin x+\cos x]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}$$
$$=2\sqrt{2}$$

7. $y=\cos x$ மற்றும் $y=\sin x$ என்ற வளைவரைகள் $x=\frac{\pi}{4}$ மற்றும் $x=\frac{5\pi}{4}$ என்ற கோடுகள் ஆகியவற்றுக்கு இடையே உள்ள அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.



தீர்வு: $A=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(y_1-y_2)dx$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(\sin x-\cos x)dx$$
$$=[-\cos x-\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}$$
$$=2\sqrt{2}$$

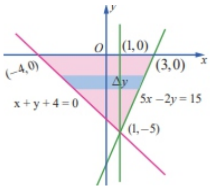
கணிதம்

8. கோடுகள் $5x-2y=15$, $x+y+4=0$ மற்றும் x-அச்சு ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பை தொகையிடல் மூலம் காண்க. **J-23**

தீர்வு: $5x-2y=15 \Rightarrow x=\frac{15+2y}{5}$,

$x+y+4=0 \Rightarrow x=-y-4$

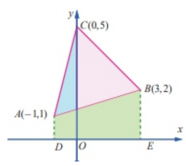
வெட்டும் புள்ளிகள் $(1,-5)$,



$$A=\int_{-5}^{0}(x_1-x_2)dy$$
$$=\int_{-5}^{0}\left(\frac{15+2y}{5}-(-y-4)\right)dy$$
$$=\int_{-5}^{0}\left(7+\frac{7y}{5}\right)dy$$
$$=\left(7y+\frac{7y^2}{10}\right)_{-5}^{0}$$
$$=0-\left(-35+\frac{35}{2}\right)=\frac{35}{2}$$

9. $(-1,1),(3,2),(0,5)$ என்பன A,B மற்றும் C-யின் புள்ளிகள் எனில் முக்கோணம் ABCஆல் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பைத் தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி காண்க.

தீர்வு:



AB ன் சமன்பாடு $y=\frac{1}{4}(x+5)$

BC ன் சமன்பாடு $y=-x+5$

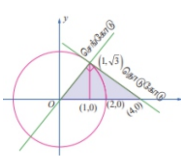
AC ன் சமன்பாடு $y=4x+5$

Δ ABC ன் பரப்பு= DACO பரப்பு + OCBE பரப்பு – DABE பரப்பு

$$=\int_{-1}^{0}(4x+5)dx+\int_{0}^{3}(-x+5)dx-\frac{1}{4}\int_{-1}^{3}(x+5)dx$$
$$=\left[4\frac{x^2}{2}+5x\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x^2}{2}+5x\right]_{0}^{3}-\frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}+5x\right]_{-1}^{3}$$
$$=[0-(2-5)]+\left[-\frac{9}{2}+15-0\right]-\frac{1}{4}\left[\frac{9}{2}+15-\left(\frac{1}{2}-5\right)\right]$$
$$=3+\frac{21}{2}-\frac{1}{4}\left(\frac{39}{2}+\frac{9}{2}\right)$$
$$=3+\frac{21}{2}-6$$
$$=\frac{15}{2}$$

10. $x^2+y^2=4$ என்ற வட்டத்தில் $(1,\sqrt{3})$ எனும் புள்ளியில் தொடுகோடு, செங்கோடு மற்றும் x-அச்சு ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பை தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி காண்க.

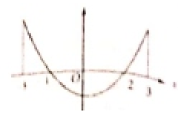
தீர்வு:



$$A=\int_{0}^{\sqrt{3}}(x_1-x_2)dy$$
$$=\int_{0}^{\sqrt{3}}\left[(4-y\sqrt{3})-\frac{y}{\sqrt{3}}\right]dy$$
$$=\left[4y-\sqrt{3}\frac{y^2}{2}-\frac{y^2}{2\sqrt{3}}\right]_{0}^{\sqrt{3}}$$
$$=4\sqrt{3}-\frac{3}{2}\sqrt{3}-\frac{3}{2\sqrt{3}}$$
$$=2\sqrt{3}$$

11. வளைவரை, $2+x-x^2+y=0$, x-அச்சு, $x=-3$ மற்றும் $x=3$ ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு: $y=x^2-x-2$



$$A=\int_{-3}^{-1}(y)dx+\int_{-1}^{2}(-y)dx+\int_{2}^{3}(y)dx$$
$$=\int_{-3}^{-1}(x^2-x-2)dx-\int_{-1}^{2}(x^2-x-2)dx+\int_{2}^{3}(x^2-x-2)dx$$
$$=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right)_{-3}^{-1}-\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right)_{-1}^{2}+\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right)_{2}^{3}$$
$$=\frac{26}{3}+\frac{9}{2}+\frac{11}{6}$$
$$=15$$

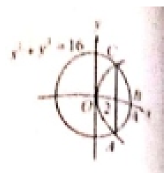
12. $x^2+y^2=16$ என்ற வட்டத்திற்கும் $y^2=6x$ என்ற பரவளையத்திற்கும் பொதுவான அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு: $x^2+y^2=16$, $y^2=6x$

$x^2+6x-16=0$

$x=2,\quad -8$

(சாத்தியமற்றது)



$$A=2\int_{0}^{2}y\,dx+2\int_{2}^{4}y\,dx \qquad =\frac{4}{3}(4\pi+\sqrt{3})$$
$$=2\int_{0}^{2}\sqrt{6x}\,dx+2\int_{2}^{4}\sqrt{16-x^2}\,dx$$
$$=2\sqrt{6}\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)_{0}^{2}+2\left[\frac{x\sqrt{16-x^2}}{2}+\frac{16}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right)\right]_{2}^{4}$$
$$=\frac{16\sqrt{3}}{3}+0+16\times\frac{\pi}{2}-4\sqrt{3}-16\times\frac{\pi}{6}$$
$$=\frac{4}{3}\left(4\pi+\sqrt{3}\right.$$

1 மதிப்பிடுக $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\, dx$

தீர்வு: $f(x) = x\cos x$

$f(-x) = -f(x)$ $f(x)$ ஓர் ஒற்றை சார்பு

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\, dx = 0$

2 மதிப்பிடுக $\int_{-5}^{5} \frac{e^x-1}{e^x+1} dx$

தீர்வு: $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$

$f(-x) = -f(x)$ $f(x)$ ஓர் ஒற்றை சார்பு

$\int_{-5}^{5} \frac{e^x-1}{e^x+1} dx = 0$

3 மதிப்பிடுக $\int_{-5}^{5} x\cos\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right) dx$

தீர்வு: $f(x) = x\cos\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$

$f(-x) = -f(x)$ $f(x)$ ஓர் ஒற்றை சார்பு

$\int_{-5}^{5} x\cos\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right) dx = 0$

4 மதிப்பிடுக $\int_{-\log 2}^{\log 2} e^{-|x|}\, dx$

தீர்வு: $f(x) = e^{-|x|}$ $f(x)$ ஓர் இரட்டை சார்பு

$$\int_{-\log 2}^{\log 2} e^{-|x|}\, dx = 2\int_0^{\log 2} e^{-x}\, dx$$
$$= 2\left(-e^{-x}\right)_0^{\log 2}$$
$$= -2\left(e^{-\log 2} - e^{-0}\right)$$
$$= -2\left(\frac{1}{2} - 1\right)$$
$$= 1$$

5 மதிப்பிடுக $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}} dx$

தீர்வு: $I = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}} dx$..........(1)

$I = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{x}} dx$.........(2)

(1)+(2) $\Rightarrow$ $2I = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{x}} dx$

$= \int_0^1 (1) dx$

$2I = (x)_0^1 = 1$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2}$

$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}} dx = \frac{1}{2}$

6 மதிப்பிடுக $\int_2^3 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{5-x}} dx$

தீர்வு: $I = \int_2^3 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{5-x}} dx$..........(1)

$I = \int_2^3 \frac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{x}} dx$.........(2)

(1)+(2) $\Rightarrow$ $2I = \int_2^3 \frac{\sqrt{5-x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{5-x}} dx$

$= \int_2^3 (1)\, dx$

$= (x)_2^3$

$= 3 - 2$

$= 1 \Rightarrow I = \frac{1}{2}$

$\int_2^3 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{5-x}} dx = \frac{1}{2}$

7 மதிப்பிடுக $\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)} dx$ M-22

தீர்வு: $I = \int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)} dx$ ....(1)

$I = \int_0^a \frac{f(a-x)}{f(a-x)+f(x)} dx$ ....(2)

(1)+(2) $\Rightarrow$ $2I = \int_0^a \frac{f(x)+f(a-x)}{f(x)+f(a-x)} dx$

$2I = \int_0^a (1)\, dx$

$2I = (x)_0^a$

$\Rightarrow 2I = a - 0 \Rightarrow I = \frac{a}{2}$

$\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)} dx = \frac{a}{2}$

8 மதிப்பிடுக $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x)}{f(\sin x)+f(\cos x)} dx$ M-20

தீர்வு: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x)}{f(\sin x)+f(\cos x)} dx$ ....(1)

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\cos x)}{f(\cos x)+f(\sin x)} dx$ ....(2)

(1)+(2) $\Rightarrow$ $2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x)+f(\cos x)}{f(\sin x)+f(\cos x)} dx$

$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1)\, dx$

$2I = (x)_0^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow 2I = \frac{\pi}{2} - 0 \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x)}{f(\sin x)+f(\cos x)} dx = \frac{\pi}{4}$

9 மதிப்பிடுக $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \frac{1}{1+\sqrt{\tan x}} dx$ M-24

தீர்வு:

$I = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \frac{1}{1+\sqrt{\frac{\sin x}{\cos x}}} dx = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}} dx$ ......(1)

10 மதிப்பிடுக $\int_0^1 |5x - 3|\, dx$

தீர்வு:

$\int_{-4}^{4} |x+3|\, dx = \int_0^{\frac{3}{5}} (-5x+3)\, dx + \int_{\frac{3}{5}}^1 (5x-3)\, dx$

$= \left[-\frac{5x^2}{2} + 3x\right]_0^{\frac{3}{5}} + \left[\frac{5x^2}{2} - 3x\right]_{\frac{3}{5}}^1$

$$I=\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}}\frac{\sqrt{sinx}}{\sqrt{cosx}+\sqrt{sinx}}dx \quad ....(2)$$

$$(1)+(2)\Longrightarrow\quad 2I=\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}}\frac{\sqrt{cosx}+\sqrt{sinx}}{\sqrt{cosx}+\sqrt{sinx}}dx$$

$$2I=\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}}(1)\,dx$$

$$2I=(x)_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \qquad 2I=\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi}{8}$$

$$2I=\frac{2\pi}{8}\Rightarrow\quad I=\frac{\pi}{8}$$

$$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}}\frac{1}{1+\sqrt{tanx}}dx=\frac{\pi}{8}$$

$$=\left[\left(-\frac{9}{10}+\frac{9}{5}\right)-(0)\right]+\left[\left(\frac{5}{2}-3\right)-\left(\frac{9}{10}-\frac{9}{5}\right)\right]$$

$$=\frac{9}{5}-\frac{1}{2}+\frac{9}{5}$$

$$=\frac{9}{5}-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{18-5}{10}$$

$$=\frac{13}{10}$$

11 மதிப்பிடுக $\int_{-4}^{4}|x+3|\,dx$

தீர்வு:

$$\int_{-4}^{4}|x+3|\,dx=\int_{-4}^{-3}(-x-3)\,dx+\int_{-3}^{4}(x+3)\,dx$$

$$=\left[-\frac{x^2}{2}-3x\right]_{-4}^{-3}+\left[\frac{x^2}{2}+3x\right]_{-3}^{4}$$

$$=\left[\left(-\frac{9}{2}+9\right)-\left(-\frac{16}{2}+12\right)\right]+\left[\left(\frac{16}{2}+12\right)-\left(\frac{9}{2}-9\right)\right]$$

$$=\frac{9}{2}-4+20+\frac{9}{2}$$

$$=25$$

12 (i) மதிப்பிடுக $\int xe^x dx$

தீர்வு: $\int xe^x dx = xe^x - e^x + c$

$$=e^x(x-1)+c$$

(ii) $\int_0^1 xe^x\,dx = 1$ எனக்காட்டுக

$$\int_0^1 xe^x\,dx=[e^x(x-1)]_0^1$$

$$=0-(-1)=1$$

13 மதிப்பிடுக $\int x^3e^x dx$

தீர்வு:

$$\int x^3e^xdx=x^3e^x-3x^2e^x+6xe^x-6e^x+c$$

$$=e^x(x^3-3x^2+6x-6)+c$$

14 மதிப்பிடுக $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{10}x\,dx$ **M-24**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{10}x\,dx=\frac{9\times7\times5\times3\times1}{10\times8\times6\times4\times2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{63\pi}{512}$$

15 மதிப்பிடுக $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^9x\,dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^9x\,dx=\frac{8\times6\times4\times2}{9\times7\times5\times3}=\frac{128}{315}$$

16 மதிப்பிடுக $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^6xcos^4x\,dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^6xcos^4x\,dx=\frac{5\times3\times1\times3\times1}{10\times8\times6\times4\times2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{512}$$

17 மதிப்பிடுக $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^5xcos^4x\,dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^5xcos^4x\,dx=\frac{4\times2\times3\times1}{9\times7\times5\times3}=\frac{8}{315}$$

18 மதிப்பிடுக $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3xcos^5x\,dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3xcos^5x\,dx=\frac{2\times4\times2}{8\times6\times4\times2}=\frac{1}{24}$$

19 மதிப்பிடுக $\int_0^{2\pi} sin^7\frac{x}{4}dx$

$$\int_0^{2\pi} sin^7\frac{x}{4}dx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^7x\,dx$$

$$=4\left[\frac{6\times4\times2}{7\times5\times3}\right]=\frac{64}{35}$$

20 மதிப்பிடுக $\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin^6 2x\,dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin^6 2x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^6x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{5\times3\times1}{6\times4\times2}\times\frac{\pi}{2}\right]=\frac{5\pi}{64}$$

21 மதிப்பிடுக $\int_0^1 x^3(1-x)^4dx$

$$\int_0^1 x^3(1-x)^4dx=\frac{3!\times4!}{(3+4+1)!}=\frac{3!\times4!}{8!}=\frac{1}{280}$$

22 மதிப்பிடுக $\int_0^1 x^5\left(1-x^2\right)^5dx$

$$\int_0^1 x^5\left(1-x^2\right)^5dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left(x^2\right)^2\left(1-x^2\right)^5d\left(x^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2!\times5!}{8!}\right]=\frac{1}{336}$$

23 மதிப்பிடுக $\int_0^{\infty} x^5e^{-3x}dx$ **J-23**

24 மதிப்பிடுக $\int_b^{\infty}\frac{1}{a^2+x^2}dx$ **M-23**

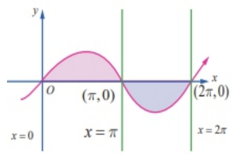
$$\int_0^\infty x^5 e^{-3x} dx = \frac{5!}{3^{5+1}} = \frac{5!}{3^6}$$

$$\int_b^\infty \frac{1}{a^2+x^2} dx = \left[\frac{1}{a} tan^{-1}\frac{x}{a}\right]_b^\infty$$
$$= \left[\frac{1}{a} tan^{-1}\frac{\infty}{a}\right] - \left[\frac{1}{a} tan^{-1}\frac{b}{a}\right]$$
$$= \frac{1}{a}\left[\frac{\pi}{2} - tan^{-1}\frac{b}{a}\right]$$

25. $y = \sin x$ என்ற வளைவரை, x -அச்சு, கோடுகள் $x = 0$ மற்றும் $x = 2\pi$ ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு:

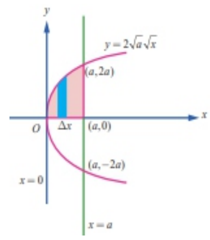
$$A = \int_0^{2\pi} ydx$$
$$= 2\int_0^{\pi} ydx$$
$$= 2\int_0^{\pi} sinxdx$$
$$= 2(-cosx)_0^{\pi}$$
$$= 2(1+1)$$
$$= 4$$



26. $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்திற்கும் அதன் செவ்வகலத்திற்கும் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க. J-22

தீர்வு: $y^2 = 4ax \Rightarrow y = 2\sqrt{a}\sqrt{x}$

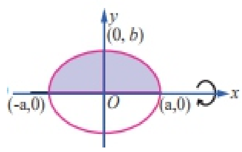
$$A = 2\int_0^a ydx$$
$$= 2\int_0^a 2\sqrt{a}\sqrt{x}dx$$
$$= 4\sqrt{a}\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)_0^a$$
$$= \frac{8\sqrt{a}\times a^{\frac{3}{2}}}{3}$$
$$= \frac{8a^2}{3}$$



27. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b$ என்ற அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பினை நெட்டச்சைப் பொருத்துச் சுழற்றினால் உருவாகும் திடப்பொருளின் கனஅளவைக் காண்க.

தீர்வு: $V = \pi\int_{-a}^{a} y^2dx$

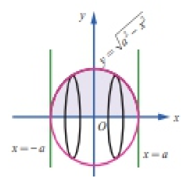
$$= \pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)dx$$
$$= 2\pi\frac{b^2}{a^2}\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a$$
$$= 2\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right)$$
$$= 2\pi\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{2a^3}{3}\right)$$
$$= \frac{4\pi ab^3}{3}$$



28. ஆரம் a உடைய கோளத்தின் கன அளவைக் காண்க.

தீர்வு: $V = \pi\int_{-a}^{a} y^2dx$

$$= \pi\int_{-a}^{a}(a^2 - x^2)dx$$
$$= 2\pi\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a$$
$$= 2\pi\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right)$$
$$= 2\pi\left(\frac{2a^3}{3}\right)$$
$$= \frac{4\pi a^3}{3}$$



29. ஆரம் r மற்றும் உயரம் h உடைய நேர்வட்டக் கூம்பின் கன அளவைக் காண்க.

தீர்வு: $V = \pi\int_{-a}^{a} y^2dx$

$$= \pi\int_0^h\left(\frac{r}{h}x\right)^2dx$$
$$= \pi\left(\frac{r}{h}\right)^2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h$$
$$= \pi\frac{r^2}{h^2}\left(\frac{h^3}{3}\right)$$
$$= \pi\left(\frac{r^2h}{3}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\pi r^2h$$